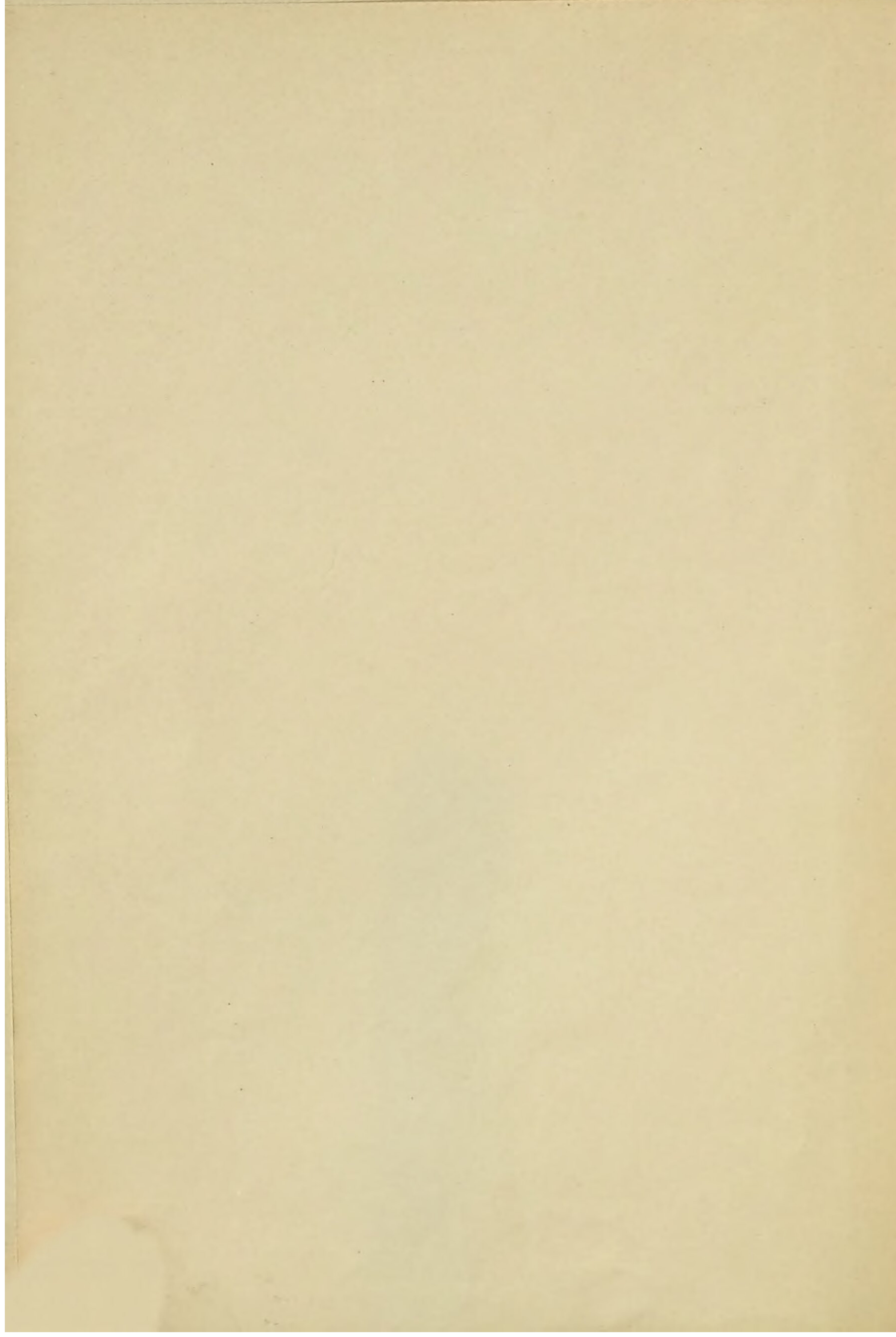




Kleyers

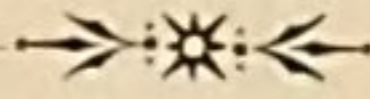


Encyklopädie



der gesamten

mathematischen, technischen und exakten
Natur-Wissenschaften.



Abteilung:

Raumgrößenlehre I.





Lehrbuch
der
ebenen Elementar-Geometrie
(Planimetrie).

Erster Teil:

**Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene
und die Kreislinie im allgemeinen.**

Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben.

Mit 234 Erklärungen und 109 in den Text gedruckten Figuren.

Für den Schulunterricht und das Selbststudium

bearbeitet

nach eigenem System

und in Rücksicht auf die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung

von

Adolph Kleyer.



Bremerhaven.

Verlag von L. v. Vangerow.



Vorwort.

Bei der Bearbeitung dieser Raumgrössenlehre ging ich von zwei Grundsätzen aus, zu welchen der Mensch in seinen wissenschaftlichen Untersuchungen durch Erfahrung gelangt.

Der eine dieser Grundsätze heisst:

„Eine jede reale Wissenschaft kann nur dann zu ihrer, nach menschlichem Ermessen höchsten Vollendung geführt werden, wenn die Grundbegriffe und die Grundsätze oder Axiome, welche ihr als Fundament, als Basis dienen, so festgestellt werden, dass mit ihnen dem Gelehrten und dem Studierenden etwas ganz bestimmtes, etwas reales gegeben ist.“

Der zweite jener Grundsätze heisst:

„Alle Naturwissenschaften müssen in ihrem synthetischen Aufbau gemeinsame Grundlagen haben, diese Grundlagen müssen die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften sein.“

Diesen Grundsätzen entsprechend, versuchte ich die Grundbegriffe der Raumgrössenlehre, wie: Körper, Raum, Ausdehnung, Form, Richtung, Punkt, Linie, Strahl, Strecke, Ebene etc. etc. so zu erklären, dass diese Begriffe durchaus bestimmt sind, dass sie mit den arithmetischen Grundbegriffen das Band bilden, mit welchem die exakten Naturwissenschaften in der Mathematik verknüpft sind, wie ich in meiner Einleitung zur Infinitesimalrechnung darzustellen versucht habe, auf welche ich hier in weiterem verweisen muss.

Wenn es mir gelang, in diesem ersten Teil der Raumgrössenlehre unter anderem z. B. den so wichtigen Satz:

„Eine gerade Linie ist durch zwei Punkte bestimmt“

beweisen zu können, und ihn deshalb nicht als Grundsatz annehmen zu müssen, wie es gemeinhin geschieht, so ist dies nur darauf zurückzuführen, dass ich in Rücksicht auf jene Grundsätze vor allem dem Punkt, als Infinitesimal oder Atom gedacht, Form und Ausdehnung, wenn auch beide nicht wahrnehmbar, nicht angebbar, beilegte.

Mein grösster Wunsch ist der, dass durch diese Arbeit, durch meine Differential- und Integralrechnung und meine weiteren hier anschliessenden Arbeiten das Studium der Mathematik, besonders der höheren Mathematik, erleichtert und der weitere Aufbau der realen Philosophie gefördert werden möge.

Für jede Unterstützung zur Erreichung dieses Zwecks, sei sie in Form einer Korrektur, sei sie in Form einer Ergänzung, eines Beitrags, u. a. m., bin ich dankbar.

Frankfurt a. M., im August 1888.

Adolph Kleyer.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung zur Raumgrößenlehre *)	1— 5

*) entnommen meiner Einleitung zur Infinitesimal-Rechnung.

Die ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

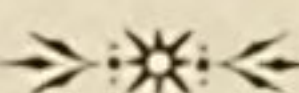
Erster Teil:

Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie
im allgemeinen.

A) Ueber die gerade Linie	8—15
B) Ueber den Strahl	16—19
C) Ueber die Strecke.	
1) Ueber die Strecke im allgemeinen	20—24
2) Ueber das Vergleichen von Strecken	25—29
3) Ueber das Messen von Strecken	29—38
D) Ueber die Ebene	38—48
E) Ueber die Kreislinie, die gebrochene und die gemischte Linie	48—57

Aufgabensammlung.

A) Ueber geometrische Aufgaben im allgemeinen	59—61
B) Berechnungsaufgaben	62—70
C) Konstruktionsaufgaben	70— 84
D) Aufgaben, in welchen die Beweise zu aufgestellten Behauptungen gefordert werden	84—92



Inhaltsverzeichnis

Inhalt des Bandes (Seite 1)

Die erste Elementartheorie (Seite 1)

Erster Teil:

Die ersten fünf Jahre des Lebens (Seite 1)

Im ersten Jahr:

1) Leben des ersten Jahres (Seite 1)

2) Leben des zweiten Jahres (Seite 1)

3) Leben des dritten Jahres (Seite 1)

4) Leben des vierten Jahres (Seite 1)

5) Leben des fünften Jahres (Seite 1)

6) Leben des sechsten Jahres (Seite 1)

7) Leben des siebten Jahres (Seite 1)

8) Leben des achten Jahres (Seite 1)

Zusammenfassung:

1) Leben des ersten Jahres (Seite 1)

2) Leben des zweiten Jahres (Seite 1)

3) Leben des dritten Jahres (Seite 1)

4) Leben des vierten Jahres (Seite 1)

5) Leben des fünften Jahres (Seite 1)

Einleitung*)

zur

Raumgrössenlehre.

Die Gesamtheit des Wahrnehmbahren, »Weltall« genannt, erscheint dem Menschen aus einer Menge einzelner, getrennter, für sich bestehender sogenannter Körper oder Dinge (wirklichen Dingen, im Gegensatz zu Gedankendingen) zu bestehen, welche Stücke oder Teile des Weltalls sind, und in bestimmter Weise angeordnet das Ganze bilden; ein solch einzelner, scheinbar für sich bestehender Teil, ein Körper oder ein wirkliches Ding scheint ihm, sei er selbst.

Denkt sich der Mensch das Weltall, wie es ihm sich offenbart, hinweg, so bleibt nach seinem Vorstellungsvermögen eine (endlose) Leere, welche »Raum« im weitesten Sinne heisst.

Die einzige Eigenschaft, welche hiernach dem Raum beigelegt werden kann, ist die, dass er den Menschen mit seinem Weltall in sich enthält, dass er von dem Menschen mit seinem Weltall erfüllt wird; diese wesentliche oder Grundeigenschaft des Raumes heisst »Ausdehnung des Raumes.«

Die Körper, aus welchen für den Menschen das Weltall besteht, haben somit die Eigenschaft, dass sie sich in dem Raum befinden und denselben erfüllen und diese Eigenschaft der Raumerfüllung, ohne welche kein Körper denkbar ist, welche also eine wesentliche oder Grundeigenschaft aller Körper ist, heisst »Ausdehnung der Körper.«

Der Gegensatz von dem, was durch das Auge wahrnehmbar ist und was Körper im engeren Sinne heisst, also das, was durch das Auge nicht mehr wahrnehmbar ist, kann Raum im engeren Sinne genannt werden.

Wo das Auge nichts wahrnimmt, da ist Raum.

Jeder von dem Auge wahrnehmbarer einzelner Körper besitzt sog. Grenzen, d. i. das Aeusserste, über welches hinaus der Körper als ein von dem Auge wahrnehmbarer Körper aufhört als solcher zu bestehen.

Die Grenzen oder das Aeusserste eines solchen Körpers, eines Körpers im engeren Sinne, sind die Grenzen oder das Aeusserste des Raumes im engeren Sinne.

Körper und Raum sind somit auch im engeren (gewöhnlichen) Sinne zwei Begriffe, welche sich gegenseitig bedingen, die Vorstellung des einen ist ohne die Vorstellung des andern nicht möglich.

Die steten von dem Auge, dem Sinn »Gesicht« wahrnehmbaren Veränderungen der Körper, die sog. Erscheinungen, das wechselnde Ver-

*) Entnommen meiner Einleitung zur Infinitesimal-Rechnung.

gehen und Entstehen der Körper, sowie die Resultate vieler Forschungen führen auf den Gedanken, dass das Vergehen der Körper in einem Auflösen, Zersetzen, Zerlegen oder Zerteilen in »Etwas«, dass das Entstehen, das Bilden der Körper in einem Zusammensetzen, Zusammenfügen oder in einer »Aneinanderlagerung von Etwas« bestehen muss; sie führen auf den Gedanken, dass es auch Körper gibt, die mit dem Auge zwar nicht mehr, aber vielleicht mit anderen der Sinne, Geruch, Geschmack, Gehör und Gefühl wahrgenommen werden können; sie führen auf den Gedanken, dass es auch solche Körper oder Dinge geben muss, die mit keinem der Sinne mehr wahrgenommen werden aber doch bestehen, und dass wahrnehmbare (sog. endliche) Körper aus jenen nicht mehr wahrnehmbaren (den sog. unendlich kleinen) Körpern gebildet oder zusammengesetzt sind; sie führen weiterhin auf den Gedanken, dass es schliesslich auch solche nicht mehr wahrnehmbare Körper noch geben muss, die aus einzelnen andern nicht mehr wahrnehmbaren Körpern zusammengesetzt oder gebildet sind; — ein solch einzelner, nicht mehr aus Teilen bestehend gedachter, durch keinen Sinn wahrnehmbarer, im Vergleich zu jedem noch so kleinen wahrnehmbaren Körper noch kleinerer Körper, ist ein »Infinitesimal«, auch Atom oder Punkt genannt.

Das Wort „Infinitesimal“ von dem deutschen Mathematiker Leibniz (1646 bis 1716) eingeführt, stammt von dem lateinischen Wort „infinitum“ (das Unendliche).

Ein Infinitesimal ist Etwas, das im Vergleich zu jedem denkbar andern Etwas kleiner gedacht werden muss.

Das Wort „Atom“, jedenfalls von dem griechischen Philosophen Epicur (345 bis 274 v. Chr.) eingeführt, stammt von dem griech. Wort Atōmi; es bedeutet ein kleinstes, ein nicht mehr teilbares Teilchen.

Die Benennungen: Infinitesimal und Atom werden angewandt, wenn man auf die verschiedenen Arten derselben Rücksicht nehmen muss, wie z. B. in der Chemie und in anderen Naturwissenschaften. Die Benennung: Punkt statt Infinitesimal oder Atom wird angewandt, wenn keine Rücksicht auf die verschiedenen Arten der Infinitesimale genommen wird, sondern denselben die gemeinsame Grundeigenschaft beigelegt wird, dass sie in Bezug auf die Art und Weise der Raumerfüllung oder ihrer Ausdehnung übereinstimmende Eigenschaften haben, wie z. B. in der Raumgrössenlehre, in welcher wie nachher noch weiter ausgeführt wird, nur die Art und Weise der Nebeneinanderlagerung der Infinitesimalen in Betracht kommt und zwar unter der Voraussetzung, dass denselben rücksichtlich der Raumerfüllung oder der Ausdehnung übereinstimmende Eigenschaften beigelegt werden.

Die gemeinsamen Eigenschaften, welche man den Infinitesimalen beilegen kann, sind unter anderem folgende:

- a) sie sind durch keinen unserer Sinne (auch mittels keiner Hilfswerkzeuge) wahrnehmbar;
- b) infolge einer bestimmten Entstehungsweise lagern sie sich aneinander und bilden in Aneinanderlagerungen die Körper, welche der Mensch wahrnimmt;
- c) sie sind Teile der Körper und zwar die kleinsten, nicht mehr teilbaren Teile;
- d) sie haben als Teile der Körper die Grundeigenschaften der Körper, nämlich: »Ausdehnung und Form«, wenn auch beide nicht wahrnehmbar, nicht bestimmbar und nicht angebbar.

Die Verschiedenartigkeit der Grenzen der von dem Auge wahrnehmbaren Körper führt dazu, Körper in Beziehung ihrer Grenzen zu ver-

gleichem und nach dieser Vergleichung jedem Körper eine sog. Form oder Gestalt beizulegen.

Die Form oder Gestalt eines Körpers wird bedingt durch die Art und Weise der Aneinanderlagerung der Infinitesimalen, welche den Körper bilden.

— Diese Aussage berechtigt den Menschen noch nicht dazu, einem Infesimal selbst eine bestimmte Form beilegen zu dürfen. —

Von welcher Art die Form eines Infinitimals ist, bzw. sein kann, dieses festzustellen bleibt dem Menschen ewig vorbehalten, da die Infinitimale selbst nicht wahrnehmbar sind und die Menge, die Anzahl der Infinitimale, welche einen wahrnehmbaren Körper bilden, nicht bestimmbar ist; es bleibt somit dem freien Ermessen des Einzelnen, welcher sich bei seinen Betrachtungen von einer Form oder Gestalt nicht trennen kann, überlassen, den Infinitesimalen irgend eine Form beizulegen, nur darf er dabei nicht vergessen, dass ein Infesimal eine nicht mehr wahrnehmbare Ausdehnung hat.

Eine ungefähre, aber auch nur eine ungefähre, die Wirklichkeit noch nicht annähernd erreichende Vorstellung von einem Infesimal kann man sich machen, wenn man sich ein sehr kleines, gerade noch wahrnehmbares Körperteilchen, Körperchen, einen sog. »künstlichen Punkt« (von dem lateinischen Wort punctum, d. h. Stich) denkt oder einen solchen mittels eines Materials wie Blei, Tinte, Kreide, Tusche etc. auf einem Blatt Papier oder sonst auf einem jenes Material annehmenden Körper wirklich darstellt. Unter einem natürlichen oder wirklichen Punkt hat man irgend ein Infesimal zu verstehen; ein künstlicher Punkt ein »•« ist stets nur eine bildliche Darstellung (ein Symbol) eines wirklichen Punktes oder eines Infinitimals oder eines Atoms.

Legt man den Infinitesimalen die Eigenschaften bei, dass sie, in Bezug auf Ausdehnung oder Raumerfüllung und in Bezug auf Form, ohne Unterschied sind, wozu man vollkommen berechtigt ist, indem kein Infesimal wahrnehmbar und jedes Infesimal im Vergleich zu jedem noch so klein gedachten Körperchen noch kleiner ist, dann kann man die Infinitimale, rücksichtlich ihrer Uebereinstimmung in Ausdehnung oder Raumerfüllung und Form, als sog. Einheiten der Körper betrachten.

Da die Infinitimale, in Beziehung ihrer Ausdehnung und Form übereinstimmen, so kann man sie in dieser Beziehung auch mit einem übereinstimmenden oder gemeinschaftlichen Namen benennen; dieser Name ist der Name »Punkt«.

Unter Punkten hat man somit Infinitimale, und zwar rücksichtlich ihrer Uebereinstimmung an Ausdehnung und Form zu verstehen.

Wie vorstehend gesagt, wird jeder Körper durch die Aneinanderlagerung von Infinitesimalen gebildet; hiernach muss jeder Körper die Grundeigenschaften haben, dass er:

- a) eine Mehrheit oder eine Häufigkeit von Infinitesimalen ist, dass er aus einer Menge, lat. quantum, Masse, aus einer, wenn auch unbestimmten Anzahl, einer Vielheit von Infinitesimalen besteht, und dass er
- b) aus einer Mehrheit (Menge) solcher Infinitesimalen besteht, die in bestimmter Art und Weise ununterbrochen, kontinuierlich oder stetig nebeneinandergelagert sind und in dieser Nebeneinanderlagerung, den Raum erfüllend, den Körper bilden, wie er sich dem Menschen offenbart.

Jeder Körper hat somit die früher festgestellten Grundeigenschaften des ganzen Weltalls, nämlich die, dass er eine Mehrheit ist, dass er aus einer Menge einzelner Teile besteht, die in bestimmter Weise angeordnet, den Körper bilden.

Alle Vorstellungen oder Gedankendinge, welchen man jene Grundeigenschaften der Körper oder der wirklichen Dinge beilegen kann, von welchen also jedes einzelne als eine Mehrheit, als eine Menge von irgend welchen in gewisser Beziehung übereinstimmender Etwas, von irgend welchen sog. Einheiten betrachtet werden kann, kann man ebenso wie die Körper selbst, welche als Mehrheiten von Infinitesimalen betrachtet werden, die in Beziehung der Ausdehnung und Form übereinstimmen, mit dem gemeinsamen Namen »Grössen« bezeichnen.

Unter einer »Grösse« ist hiernach ganz allgemein irgend eine wirklich bestehende oder nur gedachte Mehrheit von irgend welchen wirklich bestehenden oder nur gedachten, in bestimmter Beziehung übereinstimmender Etwas, sog. Einheiten zu verstehen.

Unter einer Einheit versteht man ganz allgemein Etwas, als dessen Mehrheit etwas Anderes betrachtet werden kann.

Einheit und Mehrheit sind Begriffe, welche sich gegenseitig bedingen.

Bei jeder Grösse kann man dreierlei Einheiten, nämlich:

- a) elementare (lat., d. h. einfachste)
- b) absolute (lat., d. h. beziehungslose),
- und
- c) relative (lat., d. h. in Beziehung zu andern stehenden).

Einheiten unterscheiden.

Eine elementare Einheit, auch Bildungseinheit, kurzweg Element der betreffenden Grösse genannt, ist ein solcher kleinster Teil einer Grösse, welcher die Eigenschaft hat, dass jeder gedachte Teil seiner selbst nicht mehr diejenige Eigenschaft hat, durch welche die Art oder das Wesen der betreffenden Grösse bestimmt ist, dass er also keine Aenderung mehr erleiden darf, ohne dass er aufhören würde, eine Bildungseinheit, ein Element der betreffenden Grösse zu sein.

Die Art oder das Wesen einer Grösse ist durch deren Bildungseinheit oder deren Element bestimmt.

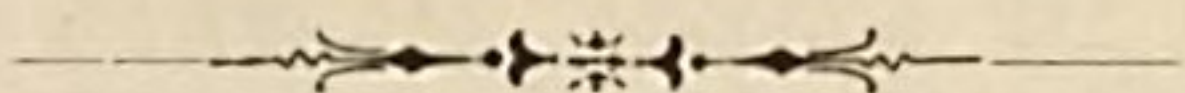
Eine absolute Einheit ist ein kleinster, nicht mehr teilbar gedachter Teil der Bildungseinheit einer Grösse, sie ist das, was in vorstehendem als ein Infinitesimal bezeichnet wurde.

Eine relative Einheit ist irgend ein Teil einer Grösse, der selbst wieder aus Teilen bestehen kann, die Bildungseinheiten derselben Grösse sind (siehe Antwort auf Frage 33).

Sind die Einheiten, aus welchen eine Grösse nach der vorstehend gegebenen allgemeinen Definition einer Grösse besteht, getrennt, reihen sie sich nicht aneinander und bilden sie keine ununterbrochene Aneinanderlagerungen, so heisst die Grösse selbst eine »diskrete« Grösse (siehe die Lehren über die Arithmetik); bilden hingegen die Einheiten ununterbrochene, kontinuierliche oder stetige Aneinanderlagerungen, so heisst die Grösse selbst eine kontinuierliche oder stetige Grösse. Jeder Körper ist in Rücksicht darauf, dass er aus einer ununterbrochenen Aneinanderlagerung von Infinitesimalen oder Punkten besteht, eine stetige Grösse.

Rücksichtlich der Art und Weise, wie ein Körper den Raum erfüllt oder wie eine gedachte stetige Grösse den Raum erfüllen muss, da eine gedachte Aneinanderlagerung von Infinitesimalen ohne eine bestimmte Art und Weise der Anordnung im Raum, der Raumerfüllung nicht denkbar ist, nennt man die Körper, bezw. die stetigen Grössen, auch »Raumgrössen«; die Wissenschaft, welche sich mit solchen Grössen beschäftigt, heisst »Raumgrössenlehre«.

Die Raumgrössenlehre, ursprünglich auch Geometrie genannt, zerfällt je nach den Hilfsmitteln, welche sie zur Erreichung ihrer Zwecke benutzt, je nach den besonderen Arten der Raumgrössen selbst, je nach den Beziehungen, in welche sie bei der Betrachtung treten, in eine grosse Anzahl besonderer Zweige; eine scharfe Trennung und Gliederung derselben ist, obgleich die Geometrie, oder die Raumgrössenlehre, die älteste und fruchtbarste aller Wissenschaften ist, nach dem heutigen Stand dieser Wissenschaft und in Rücksicht darauf, wie eine Wissenschaft gelehrt werden muss, nicht möglich.



Die vorliegende Schrift ist eine Darstellung der Geschichte der deutschen Literatur von der Mitte des 18. Jahrhunderts bis zur Gegenwart. Sie ist in drei Theile getheilt: der erste Theil behandelt die Geschichte der deutschen Literatur von der Mitte des 18. Jahrhunderts bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts, der zweite Theil die Geschichte der deutschen Literatur von der Mitte des 19. Jahrhunderts bis zur Gegenwart, und der dritte Theil die Geschichte der deutschen Literatur von der Gegenwart bis zur Zukunft.

Die Geschichte der deutschen Literatur ist eine sehr interessante und wichtige Wissenschaft. Sie ist nicht nur eine Wissenschaft, sondern auch eine Kunst. Sie ist eine Wissenschaft, weil sie die Geschichte der deutschen Literatur darstellt, und eine Kunst, weil sie die Geschichte der deutschen Literatur darstellt. Sie ist eine Wissenschaft, weil sie die Geschichte der deutschen Literatur darstellt, und eine Kunst, weil sie die Geschichte der deutschen Literatur darstellt.

Die Geschichte der deutschen Literatur ist eine sehr interessante und wichtige Wissenschaft. Sie ist nicht nur eine Wissenschaft, sondern auch eine Kunst. Sie ist eine Wissenschaft, weil sie die Geschichte der deutschen Literatur darstellt, und eine Kunst, weil sie die Geschichte der deutschen Literatur darstellt.

Die Geschichte der deutschen Literatur ist eine sehr interessante und wichtige Wissenschaft. Sie ist nicht nur eine Wissenschaft, sondern auch eine Kunst. Sie ist eine Wissenschaft, weil sie die Geschichte der deutschen Literatur darstellt, und eine Kunst, weil sie die Geschichte der deutschen Literatur darstellt.

Die Geschichte der deutschen Literatur ist eine sehr interessante und wichtige Wissenschaft. Sie ist nicht nur eine Wissenschaft, sondern auch eine Kunst. Sie ist eine Wissenschaft, weil sie die Geschichte der deutschen Literatur darstellt, und eine Kunst, weil sie die Geschichte der deutschen Literatur darstellt.

Die Geschichte der deutschen Literatur ist eine sehr interessante und wichtige Wissenschaft. Sie ist nicht nur eine Wissenschaft, sondern auch eine Kunst. Sie ist eine Wissenschaft, weil sie die Geschichte der deutschen Literatur darstellt, und eine Kunst, weil sie die Geschichte der deutschen Literatur darstellt.

Die Geschichte der deutschen Literatur ist eine sehr interessante und wichtige Wissenschaft. Sie ist nicht nur eine Wissenschaft, sondern auch eine Kunst. Sie ist eine Wissenschaft, weil sie die Geschichte der deutschen Literatur darstellt, und eine Kunst, weil sie die Geschichte der deutschen Literatur darstellt.

Die ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

1. Teil.

Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke und die Kreislinie im allgemeinen.

Anmerkung 1. Die ebene Elementar-Geometrie beschäftigt sich mit den Eigenschaften und den gegenseitigen Beziehungen solcher Raumgrössen, welche in einer sog. Ebene liegen, (siehe Abschnitt D); sie bedient sich keiner besonderen Hilfsmittel als der einfachsten, als der für den ersten Unterricht aller notwendigsten, der sog. elementaren, nämlich der bildlichen Darstellung mittels des Zirkels und des Lineals, sowie der einfachsten und allgemeinsten der arithmetischen Gesetze.

Die ebene Elementar-Geometrie heisst auch „*Planimetrie*“ oder *Ebenenmessung* — von dem lat. Wort *planum*, die Ebene, und von dem aus dem Griech. stammenden Worte *metrum*, das Mass hergeleitet — und zwar im Gegensatz zu andern Theilen der Raumgrössenlehre, welche in ihrer Gesamtheit „*Stereometrie*“ (griech. d. h. Körpermessung) genannt werden, und welche sich mit solchen Raumgrössen beschäftigen, die beliebig im Raume liegen.

Die ebene Elementar-Geometrie heisst spezieller auch *niedere* oder (*elementare*) *Planimetrie* und zwar im Gegensatz zu der höheren *Planimetrie*, welche sich ausser jenen Hilfsmitteln auch noch anderer Hilfsmittel, besonders der analytischen Gleichungen bedient, wie z. B. die besonderen Zweige der Raumgrössenlehre: „die ebene *Trigonometrie* und die *analytische Geometrie der Ebene*.“

Die Benennungen *Geometrie* (griech., d. h. Erdmessung), *Planimetrie*, *Stereometrie* etc. stimmen ihrem Wortlaut nach nicht mit dem überein, was durch sie gesagt werden soll. Zu empfehlen ist deshalb, solche Benennungen thunlichst zu vermeiden, dafür z. B. die entsprechenderen Benennungen:

Die Lehren v. d. eindimensionalen Raumgrössen der 1. Ordnung im eindimensionalen Raum *)

„	„	„	„	„	„	1.	„	„	zweidimensionalen	„
„	„	„	„	„	„	1.	„	„	dreidimensionalen	„
„	„	„	„	„	„	2.	„	„	zweidimensionalen	„
„	„	„	„	„	„	2.	„	„	dreidimensionalen	„
„	„	„	„	„	„	3.	„	„	dreidimensionalen	„
„	„	„	„	zweidimensionalen	„	1.	„	„	zweidimensionalen	„
„	„	„	„	„	„	1.	„	„	dreidimensionalen	„
„	„	„	„	„	„	2.	„	„	zweidimensionalen	„
„	„	„	„	„	„	2.	„	„	dreidimensionalen	„
„	„	„	„	„	„	3.	„	„	dreidimensionalen	„
„	„	„	„	dreidimensionalen	„	„	„	„	dreidimensionalen	„

zu benutzen.

*) Was diese Benennungen bedeuten, wird an den geeigneten Stellen gesagt.

Anmerkung 2. Zum Studium des vorliegenden Lehrbuchs sei bemerkt, dass derjenige Studierende, welcher noch nicht den Grad geistiger Ausbildung erlangt hat, um die in der Einleitung gegebenen Definition eines Punktes und somit auch die im nachstehenden gegebenen Definitionen einer Geraden, einer Ebene etc. verstehen zu können, sich vorläufig das nur merken soll, was über die bildliche Darstellung der Raumgrößen gesagt ist und die Sätze, zu deren Beweis jene Definitionen erforderlich sind, als Grundsätze, keines Beweises bedürftige Sätze, festhalten soll.

A) Ueber die gerade Linie.

Frage 1. Was ist eine gerade Linie?

Erkl. 1. Ausser der in nebenstehender Antwort definierten (siehe Erkl. 2) sog. geraden Linie, welche auch kurzweg „Gerade“ genannt wird, gibt es noch andere ununterbrochene Aufeinanderfolgen, Aneinanderlagerungen oder Aneinanderreihungen von Punkten, welche ganz allgemein Linien heissen, welche je nach ihren besondern Eigenschaften durch andere Beinamen näher gekennzeichnet werden; so gibt es z. B. die verschiedensten Arten von krummen Linien oder sog. Kurven, gebrochenen Linien, gemischten Linien und andere mehr. Die Definitionen solcher Linien sind an geeigneten Stellen gegeben.

Erkl. 2. Das Wort „definieren“ kommt von dem lateinischen Wort „definire“, d. h. begrenzen, bestimmen.

Von demselben lateinischen Wort stammt das Wort „Definition“, d. h. „Begriffsbestimmung.“

Erkl. 3. Die Vorstellung einer Aneinanderreihung oder einer An- oder Nebeneinanderlagerung oder einer ununterbrochenen, kontinuierlichen oder stetigen Aufeinanderfolge von vier gedachten Punkten, von welchen zwei eine solche ununterbrochene Aufeinanderfolge bilden, die zwischen den beiden andern Punkten liegt, und in Bezug auf welche die beiden andern Punkte sog. entgegengesetzte Lagen haben, ist abhängig von der Vorstellung, die man sich von einem einzelnen Punkt (rücksichtlich dessen, dass er keine wahrnehmbare und vorstellbare Ausdehnung hat) selbst macht.

Einerlei, welche Vorstellung sich der Einzelne von einem Punkt selbst macht, siehe die Einleitung, muss jene Vorstellung über die Art und Weise, wie die vier gedachten Punkte ununterbrochen aneinandergelagert sind, damit zwei derselben eine ununterbrochene Aufeinanderfolge bilden, welche zwischen den beiden andern Punkten liegt, und in Bezug auf welche die beiden andern Punkte sog. entgegengesetzte Lagen haben, eine solche sein, dass durch sie jene gedachte Aneinanderlagerung der vier Punkte ein für allemal vollkommen bestimmt ist, oder dass sie eindeutig ist, oder dass keine andere Art

Antwort. Eine gerade Linie (siehe Erkl. 1 und Antwort auf Frage 2) ist eine solche An- oder Nebeneinanderlagerung oder eine solche Aneinanderreihung oder eine solche ununterbrochene, kontinuierliche oder stetige Aufeinanderfolge von Punkten (siehe die Einleitung), welche

a) die Eigenschaft, das Merkmal hat, dass von je vier ununterbrochen aneinandergelagerten jener Punkte zwei derselben eine solche ununterbrochene Aufeinanderfolge bilden, welche zwischen den beiden andern Punkten liegt, und dass letztere in Bezug auf jene Aufeinanderfolge sogen. entgegengesetzte Lagen zu einander haben (siehe Erkl. 3) und welche

b) die Eigenschaft oder das Material hat, dass sie ohne Anfang und ohne Ende ist (siehe die Erkl. 4 bis 6.)

und Weise jener Aneinanderlagerung mehr denkbar ist, welche ebenfalls die gegebenen Bedingungen erfüllen könnte.

Erkl. 4. Die Eigenschaft einer geraden Linie, dass sie nach dem in Antwort auf Frage 1 unter a) Gesagten eine ununterbrochene Aufeinanderfolge von Punkten ist, von welchen je vier aufeinanderfolgend gedachte Punkte, die in jener Antwort angegebene Lage zu einander haben, ist die wesentliche oder die Grundeigenschaft einer geraden Linie; d. i. diejenige Eigenschaft, ohne welche man sich eine gerade Linie überhaupt nicht denken kann. Die Eigenschaft, dass sie ohne Anfang und ohne Ende ist, ist nur eine besondere Eigenschaft; es gibt nämlich spezielle Arten gerader Linien, nämlich solche, welche Anfang, bzw. Anfang und Ende haben, wie der Strahl und die Strecke [siehe die folgenden Abschnitte B) und C)].

Erkl. 5. Linien kann man, als besondere Arten von Raumgrössen, mit dem Namen „eindimensionale Raumgrössen“ bezeichnen.

Je nach der besondern Gattung der Linien kann man eindimensionale Raumgrössen der ersten, zweiten und dritten Ordnung unterscheiden.

Die geraden Linien heissen dann eindimensionale Raumgrössen der ersten Ordnung.

Die Bedeutung der Worte eindimensional und zwar der ersten, zweiten, dritten Ordnung kann an dieser Stelle nicht erklärt werden; es findet dies an den geeigneten Stellen statt (siehe Erkl. 6).

Erkl. 6. Eine solche ununterbrochene Aufeinanderfolge von Punkten, welche eine Linie, z. B. eine gerade Linie darstellt, erfüllt einen Raum und einen solchen Raum kann man eine „Raumlinie“, speziell eine gerade Raumlinie oder auch nach der Erkl. 5, einen eindimensionalen Raum nennen.

Frage 2. Auf welche Weise kann man sich eine ungefähre Vorstellung oder ein Bild von einer geraden Linie oder einer Geraden machen?

Erkl. 7. Unter einem Lineal versteht man ein Stück irgend eines festen (starren) Materials, welches an irgend einer Stelle oder an mehreren Stellen die in Antwort auf Frage 1 angeführten Grundeigenschaften einer geraden Linie oder einer Geraden besitzt. Figur 3 stellt ein Stück Holz (oder ein anderes Material) dar, welches z. B. an den durch „gerade Linie“ bezeichneten Stellen die Grundeigenschaft einer Geraden oder einer geraden Linie hat, daher der Name „Lineal“ (siehe Erkl. 10).

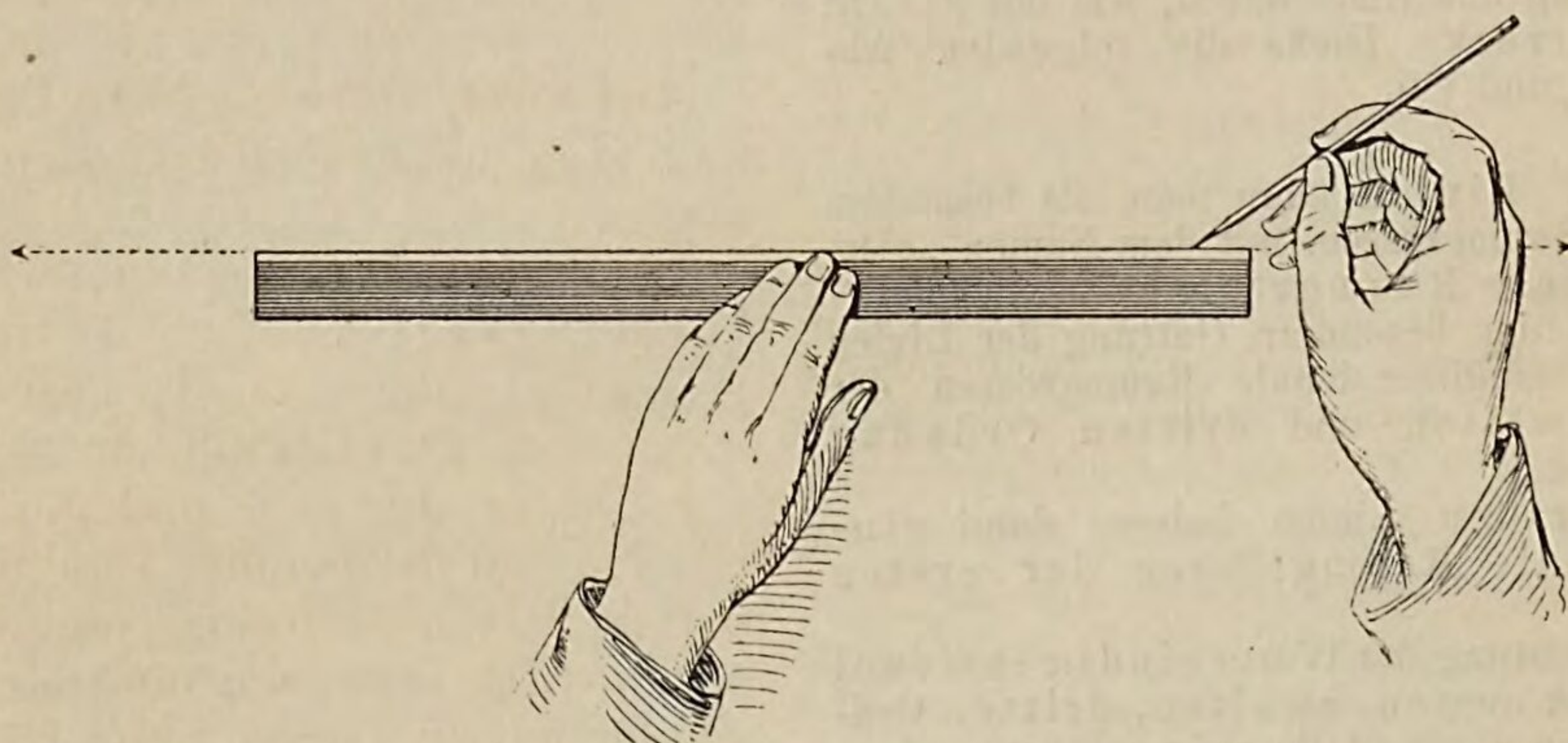
Antwort. Man kann sich eine ungefähre Vorstellung oder ein Bild von einer geraden Linie oder einer Geraden machen, indem man mittels Blei, Kreide, Tinte, Tusche oder eines andern ähnlichen Materials längs eines Lineals, siehe Erkl. 7 und Figur 1, einen möglichst feinen Strich zieht und diesen Strich als eine solche Aneinanderlagerung oder eine Aneinanderreihung oder eine ununterbrochene

Erkl. 8. Bei dem durch die Figur 1 dargestellten Strich, bzw. bei der durch die Fig. 2 dargestellten Punktreihe darf man weder Anfang noch Ende unterscheiden, wenn dadurch eine gerade Linie (im weitesten Sinne) dargestellt werden soll; man muss sich dieselben nach beiden Seiten hin weiter, bis ins Unendliche, fortgesetzt denken (siehe Erkl. 9).

In den Figuren 1 und 2 ist dies durch die angebrachten Pfeilspitzen angedeutet.

(kontinuierliche, stetige) Aufeinanderfolge von Punkten betrachtet, wie z. B. in Figur 2 angedeutet ist, in welcher man die zwischen den einzelnen Punkten befindlichen weissen Zwischenräume ebenfalls durch Punkte ausgefüllt denken muss, wodurch man eine ungefähre Vorstellung eines Teils, siehe Erkl. 8, einer solchen ununterbrochenen oder stetigen Punktreihe erhält, welche nach Antwort auf Frage 1 eine gerade Linie ist. (Siehe Erkl. 9 bis 12).

Figur 1.



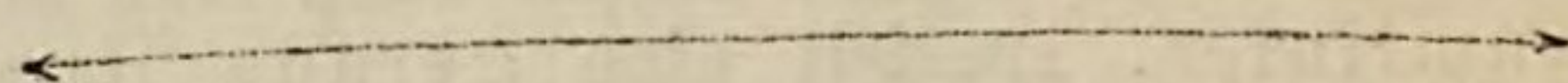
Erkl. 9. Ein nach nebenstehender Antwort gezogener feiner Strich, siehe Figur 1, ist in Rücksicht darauf, dass eine Linie eine Aneinanderreihung von Punkten ist, siehe Figur 2 und die Erkl. 8, Punkte aber nach dem in der Einleitung Gesagten nicht wahrnehmbar sind, nur ein Bild einer Linie; man nennt ein solches Bild einer Linie eine materielle oder eine künstliche Linie und zwar im Gegensatz zur Linie selbst, wie sie in Antwort auf Frage 1 definiert ist, und welche man eine mathematische oder auch eine natürliche Linie nennt.

Je feiner man einen Strich zieht, um so mehr entspricht derselbe einer mathematischen Linie.

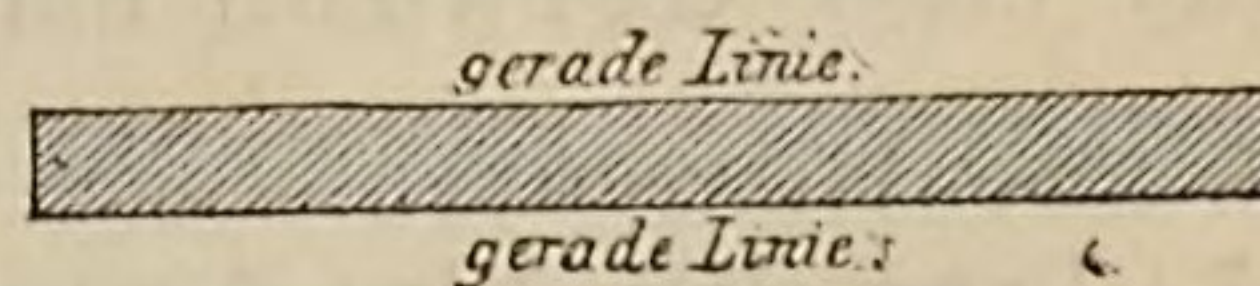
Einen Strich, wie er nach nebenstehender Antwort gezogen wird, siehe Figur 1, nennt man einen geraden Strich, meistens jedoch nennt man einen solchen geraden Strich selbst eine Linie, speziell eine gerade Linie oder eine Gerade.

Erkl. 10. Man kann sich eine Vorstellung oder ein Bild von einer Linie, speziell einer geraden Linie oder einer Geraden machen, indem man einen möglichst feinen Faden an dessen beiden Enden anspannt, daher das Wort „Linie“, vom lateinischen Wort „linea“ (linum) d. h. Faden.

Figur 2.



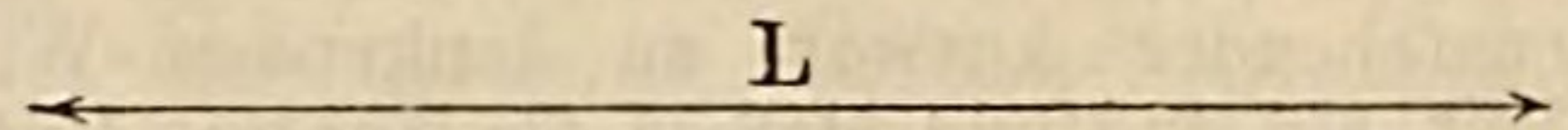
Figur 3.



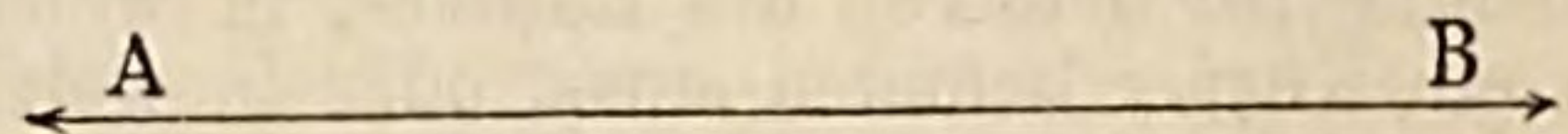
Erkl. 11. Von jedem gedachten einzelnen Punkt einer solchen kontinuierlichen Aneinanderreihung von Punkten, welche eine Linie ist, sagt man, er liege in dem durch diese Linie bestimmten Linienraum, er gehöre der Linie an; man sagt auch oft, er liege in der Linie selbst.

Erkl. 12. Eine Gerade wird gewöhnlich mit einem oder auch mit zwei grossen lateinischen Buchstaben oder auch mit zwei Ziffern bezeichnet, welche an beliebige Stellen der Geraden gesetzt werden, wie z. B. in den Figuren 4 und 5 angedeutet ist. Andere Bezeichnungsweisen sind an geeigneten Stellen angegeben.

Figur 4.



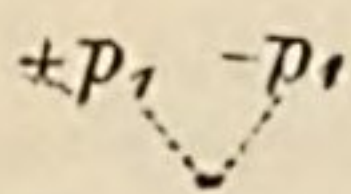
Figur 5.



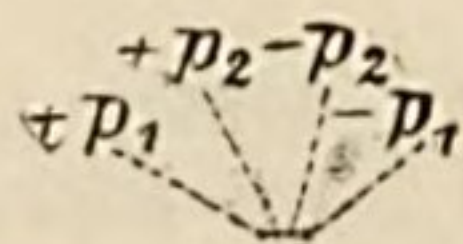
Frage 3. Wie kann man sich eine gerade Linie entstanden denken?

Erkl. 13. Die Bezeichnung eines Punktes durch $+p$, gelesen positives p (oft auch gelesen plus p), eines andern Punktes durch $-p$, gelesen negatives p (oft auch gelesen minus $-p$) hat hier vorläufig keinen andern Zweck, als jene beiden Punkte zu unterscheiden (siehe Erkl. 14).

Figur 6.



Figur 7.



Erkl. 14. Die dem Buchstaben p angehängten Ziffern $1, 2, 3, \dots$ heissen Indices, lat., d. h. Zeiger oder Anzeiger; Einzahl: Index), haben nur den Zweck, die Reihenfolge oder die Ordnung der durch $+p$, bzw. durch $-p$ bezeichneten Punkte zu kennzeichnen.

Erkl. 15. In Bezug auf die durch die Fig. 6 bildlich dargestellte Aufeinanderfolge, Aneinanderreihung oder Aneinanderlagerung zweier durch $+p_1$ und $-p_1$ bezeichneten Punkte (siehe Erkl. 13 und 14) beachte man wohl das in der Einleitung Gesagte; insbesondere beachte man, dass ein wirklicher Punkt überhaupt nicht wahrnehmbar ist (dass ein künstlicher Punkt um so mehr zur Vorstellung eines wirklichen Punktes geeignet ist, je kleiner er ist oder je mehr er dem Auge verschwindet), dass ihm keine bestimmte Form beigelegt werden darf.

Man beachte ferner, dass die Menge der Punkte, welche zur Bildung einer von dem Auge wahrnehmbaren, geraden Linie (bzw. eines Teils derselben) erforderlich ist, durch keine Zahl angebbar ist. Dasselbe ist bei den Figuren 7 bis 9 zu beachten.

Antwort. Eine gerade Linie kann man sich folgendermassen entstanden denken:

Man denke sich eine ununterbrochene Aufeinanderfolge, Aneinanderreihung oder Aneinanderlagerung von zwei Punkten $+p_1$ und $-p_1$, siehe Figur 6 und die Erkl. 13 bis 15; diese beiden Punkte denke man sich durch irgend eine Ursache auseinandergeschoben und deren innegehabten Orte, siehe Erkl. 16, Stellen im Raume, durch ein anderes Punktenpaar, durch zwei andere Punkte $+p_2$ und $-p_2$ ausgefüllt und zwar denke man sich diesen Vorgang so, dass nach demselben das neue Punktenpaar $+p_2$ und $-p_2$ zwischen jenen ersten Punkten $+p_1$ und $-p_1$ liegt, und dass letztere in Bezug auf die durch jene zweiten Punkte $+p_2$ und $-p_2$ gebildete Aneinanderreihung entgegengesetzte Lagen haben, siehe Erkl. 3; die Orte, welche somit die Punkte $+p_1$ und $-p_1$ nach jener gedachten Auseinanderschließung einnehmen müssen, sind ganz bestimmte, siehe Fig. 7 und die Erkl. 13 bis 15.

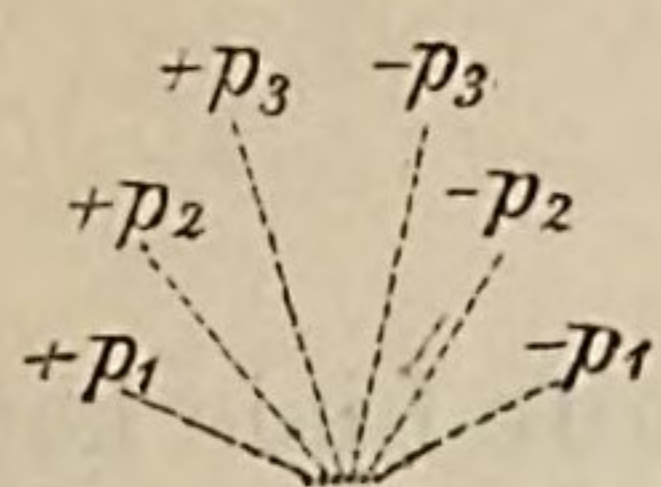
In derselben Weise denke man sich, wiederum durch jene Ursache, die beiden Punkte $+p_2$ und $-p_2$ auseinandergeschoben und deren innegehabte Orte durch ein drittes Punktenpaar, durch zwei weitere Punkte $+p_3$ und $-p_3$ ausgefüllt und zwar denke man sich diesen Vorgang so, dass nach

Die Figuren 6 bis 9 entsprechen nach Vorstehendem auch in keiner Weise der nach nebenstehender Antwort zu denkenden Wirklichkeit, sie sind und bleiben ein grobes Unterstützungsmittel für die geistige Vorstellung.

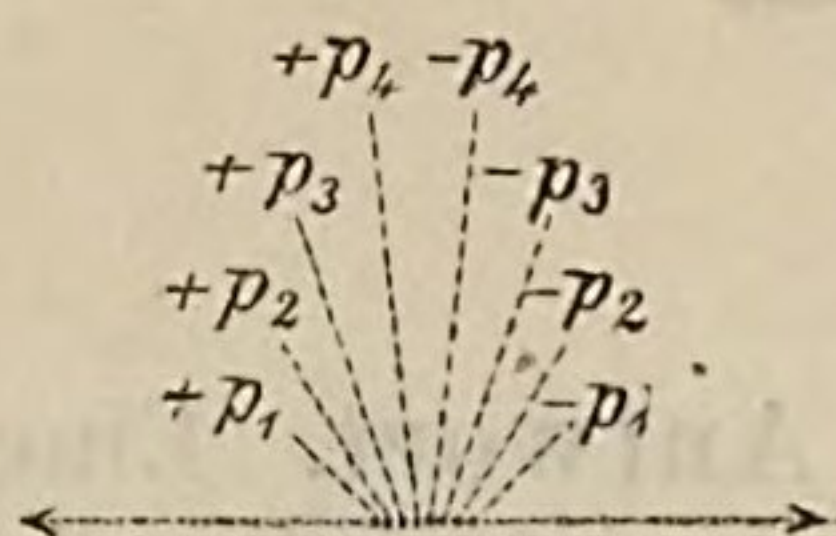
Rücksichtlich der in diesen Figuren vorkommenden Bezeichnungen beachte man die Erkl. 13 und 14.

Erkl. 16. „Ort“ ist eine allgemeine Bezeichnung für den Teil des Raumes, in welchem sich ein Körper befinden muss, oder in welchem ein Körper gedacht werden kann.

Figur 8.



Figur 9.



Erkl. 17. Jeder gedachte Teil einer geraden Linie hat die Grundeigenschaft einer Geraden; ein Teil einer geraden Linie wird deshalb auch oft selbst eine gerade Linie (im engeren Sinne) genannt.

Erkl. 18. Durch eine ununterbrochene Aufeinanderfolge zweier Punkte ist nach der in nebenstehender Antwort angegebenen Entstehungsweise eine gerade Linie vollkommen bestimmt; eine solche Aufeinanderfolge zweier Punkte heisst als kleinster Teil, durch welchen die Linie selbst bestimmt ist, ein „Linien-element“.

Frage 4. Zu welchen Vorstellungen gelangt man mittels der in Antwort auf Frage 3 gegebenen Definition der Entstehung einer geraden Linie.

Erkl. 19. Die in Antwort auf Frage 3 durch das Zeichen $+$ bezeichneten Punkte bewegen sich bei der Entstehung einer geraden Linie, wie in nebenstehender Antwort unter 3) angedeutet, im entgegengesetzten Sinne wie die durch das Zeichen $-$ bezeichneten Punkte. Den Zeichen $+$ und $-$, welche somit in Antwort auf Frage 3 den allgemein durch $p_1, p_2, \dots$ bezeichneten Punkten noch beigegeben wurden, kann man somit die Bedeutung beilegen, dass durch sie jener Gegensatz in ihrer Bewegung bei der Entstehung der geraden Linie ausgedrückt wird; man kann sie in diesem Sinne Charakterzeichen nennen (sie werden oft auch kurzweg Vorzeichen genannt); die mit $+$ bezeichneten Punkte, welche

demselben das neue Punktenpaar $+p_3$ und $-p_3$ zwischen den Punkten $+p_2$ und $-p_2$ liegt, dass jene Punkte $+p_3$ und $-p_3$ die von den Punkten $+p_2$ und $-p_2$ und dass diese Punkte $+p_2$ und $-p_2$ die von den Punkten $+p_1$ und $-p_1$ innegehabten Orte einnehmen, und dass die Punkte $+p_1$ und $-p_1$ in Bezug auf die durch die Punktepaare $+p_3, -p_3$ und $+p_2, -p_2$ gebildete, ununterbrochene Aneinanderreihung entgegengesetzte (übereinstimmende) Lagen haben; die Orte, welche somit die Punkte $+p_1$ und $-p_1$ nach der gedachten Auseinanderschließung einnehmen müssen, sind ganz bestimmte, siehe Figur 8 und die Erkl. 13 bis 15.

Denkt man sich diesen Vorgang, wie in der Figur 9 angedeutet, ohne Unterbrechung fort- und fortgesetzt, so entsteht eine ununterbrochene Aneinanderreihung von Punkten, welche die in Antwort auf Frage 1 erwähnte Eigenschaft hat, und die eine gerade Linie genannt wurde (siehe die Erkl. 17 und 18).

Antwort. Mittels der in Antwort auf Frage 3 gegebenen Definition der Entstehung einer geraden Linie gelangt man zu folgenden Vorstellungen:

1) Man gelangt zu der Vorstellung einer Trennung der das ursprüngliche Linienelement bildenden Punkte $+p_1$ und $-p_1$ durch die das zweite Linienelement bildenden Punkte $+p_2$ und $-p_2$, u. s. f.

2) Man gelangt zu der Vorstellung einer steten »Ortsveränderung einer sog. Bewegung« der das ursprüngliche Linienelement bildenden Punkte $+p_1$ und $-p_1$, ebenso der das fol-

sich alle in einem Sinne bewegen, kann man die positiven Punkte nennen; die mit $-$ bezeichneten Punkte, welche sich ebenfalls bei der Entstehung der Geraden in einem aber jenem entgegengesetzten Sinne bewegen, kann man die negativen Punkte nennen.

Erkl. 20. Die Aufeinanderfolge der Orte, welche jeder der das ursprüngliche Linien-element bildenden und durch irgend eine Ursache in Bewegung gesetzten Punkte $+p_1$ und $-p_1$ nacheinander einnehmen, nennt man den Weg oder die Bahn des Punktes $+p_1$, bzw. den Weg oder die Bahn des Punktes $-p_1$.

gende Linienelement bildenden Punkte $+p_2$ und $-p_2$, u. s. w.

3) Man gelangt zu der Vorstellung, dass die stete Ortsveränderung der durch das Zeichen $+$ bezeichneten Punkte nicht in demselben Sinne wie die stete Ortsveränderung der durch das Zeichen $-$ bezeichneten Punkte, sondern gerade im sog. entgegengesetzten Sinne stattfindet (siehe Erkl. 19).

4) Man gelangt zu der Vorstellung des sog. Weges oder der Bahn eines durch irgend eine Ursache in Bewegung gesetzten Punktes (siehe Erkl. 20).

Frage 5. Was kann man von einer geraden Linie nach der in Antwort auf Frage 3 gegebenen Definition ihrer Entstehungsweise aussagen?

Erkl. 21. Unter einem „Satz“ oder „Lehrsatz“ versteht man eine Aussage, deren Wahrheit dargethan ist oder dargethan werden muss (siehe Erkl. 22, 25 und 32).

Erkl. 22. Jeder Satz (jeder Lehrsatz) besteht seinem Wesen nach aus zwei Theilen: aus der Bedingung, gewöhnlich Annahme oder Voraussetzung (Hypothesis, siehe Erkl. 23) genannt, unter welcher etwas behauptet wird und aus der Behauptung (Thesis, s. Erkl. 24) oder der Aussage.

Erkl. 25. Die Wahrheit oder Richtigkeit der in einem Satz oder Lehrsatz ausgesprochenen Behauptung ergibt sich entweder:

a) als Folgerung aus einem sog. Grundsatz (siehe Erkl. 26) oder aus einem andern Satz (Lehrsatz), dessen Wahrheit bereits festgestellt ist.

In diesem Fall nennt man die in jenem Satz (Lehrsatz) ausgesprochene Behauptung eine Folgerung, den Satz selbst eine Folge oder einen Zusatz (lat. corollarium).

Oder sie ergibt sich:

b) daraus, dass die ausgesprochene Behauptung auf irgend eine Weise festgestellt oder bewiesen werden kann (siehe Erkl. 28.)

Erkl. 26. Unter einem Grundsatz oder Axiom (siehe Erkl. 27) versteht man eine Wahrheit, die unmittelbar einleuchtet und deshalb ohne Weiteres allgemein als wahr angenommen wird.

Antwort. Nach jener angeführten Entstehungsweise einer geraden Linie kann man die Aussage machen:

Lehrsatz 1. »Eine gerade Linie ist durch die einmal angenommene Lage zweier Punkte, welche eine ununterbrochene Aufeinanderfolge (nach der Erkl. 18 ein sog. Linien-element) bilden im voraus eindeutig bestimmt.« (Siehe Erkl. 3 und 21 bis 33.)

Erkl. 23. Das Wort „Hypothesis“ kommt aus dem Griechischen und heisst: Unterlage, Annahme, Voraussetzung.

Erkl. 24. Das Wort „Thesis“ stammt aus dem Griechischen und heisst: Aufstellung, Behauptung.

Erkl. 28. Jede ausgesprochene Behauptung bedarf eines sog. Beweises. Ein Beweis ist eine solche Verbindung von festgestellten Wahrheiten (bekannten Sätzen), aus welcher die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung hervorgeht.

Man unterscheidet:

a) synthetische und analytische Beweise,

b) direkte und indirekte (sog. apagogische) Beweise.

Ein synthetischer Beweis (siehe Erkl. 29) ist ein solcher, bei welchem man von der Voraussetzung ausgeht, um durch folgereehte Schlussziehung zu der Behauptung zu gelangen.

Ein analytischer Beweis (siehe Erkl. 30) ist ein solcher, bei welchem man umgekehrt verfährt, nämlich annimmt, die ausgesprochene Behauptung sei wahr und dann durch richtige Folgerung auf einen schon bekannten Satz kommt.

Ein direkter Beweis ist ein solcher, in welchem die Gründe für die Wahrheit der ausgesprochenen Behauptung unmittelbar angegeben werden.

Ein indirekter oder apagogischer Beweis (s. Erkl. 31) ist ein solcher, in welchem zunächst nur die Annahme des Gegenteils der Behauptung widerlegt und aus der Widerlegung des Gegenteils der Behauptung auf die Wahrheit der Behauptung geschlossen wird.

Erkl. 32. Unter der Umkehrung eines Lehrsatzes versteht man denjenigen neuen Lehrsatz, dessen Voraussetzung die Behauptung des erstern, und dessen Behauptung die Voraussetzung des erstern ist.

Erkl. 33. Die Richtigkeit der durch den Lehrsatz 1 ausgesprochenen Behauptung ergibt sich aus der in Antwort auf Frage 3 gegebenen Entstehungsweise einer geraden Linie. Der Lehrsatz 1 ist eine Folgerung des in Antwort auf Frage 3 und des in der Erkl. 3 Gesagten.

Frage 6. Was kann man von zwei Punkten aussagen, die einer geraden Linie angehören.

Erkl. 34. Die Richtigkeit der durch den Lehrsatz 2 ausgesprochenen Behauptung kann man wie folgt darthun:

Voraussetzung. In Figur 10 sei AB eine gerade Linie; $+p$ und $-p$ seien zwei Punkte, welche dieser geraden Linie angehören.

Behauptung. Die Punkte $+p$ und $-p$ können keiner zweiten geraden Linie angehören.

Beweis. Man kann die Punkte $+p$ und $-p$, welche der geraden Linie AB angehören,

Erkl. 27. Das Wort „Axiom“ stammt aus dem Griechischen, es bedeutet eine Forderung einen aufgestellten Satz als Wahrheit ohne Weiteres anzuerkennen.

Erkl. 29. Das Wort „synthetisch“ stammt aus dem Griechischen und heisst zusammenstellen, zusammensetzen.

Erkl. 30. Das Wort „analytisch“ stammt aus dem Griechischen, es heisst auflösen oder zergliedern.

Ebendaher stammt das Wort „Analysis“ d. h. Auflösung oder Zergliederung.

Erkl. 31. Das Wort „apagogisch“ stammt aus dem Griechischen und heisst ab- oder weg-führen.

Antwort. Von zwei Punkten, welche einer geraden Linie angehören, kann man die Aussage machen:

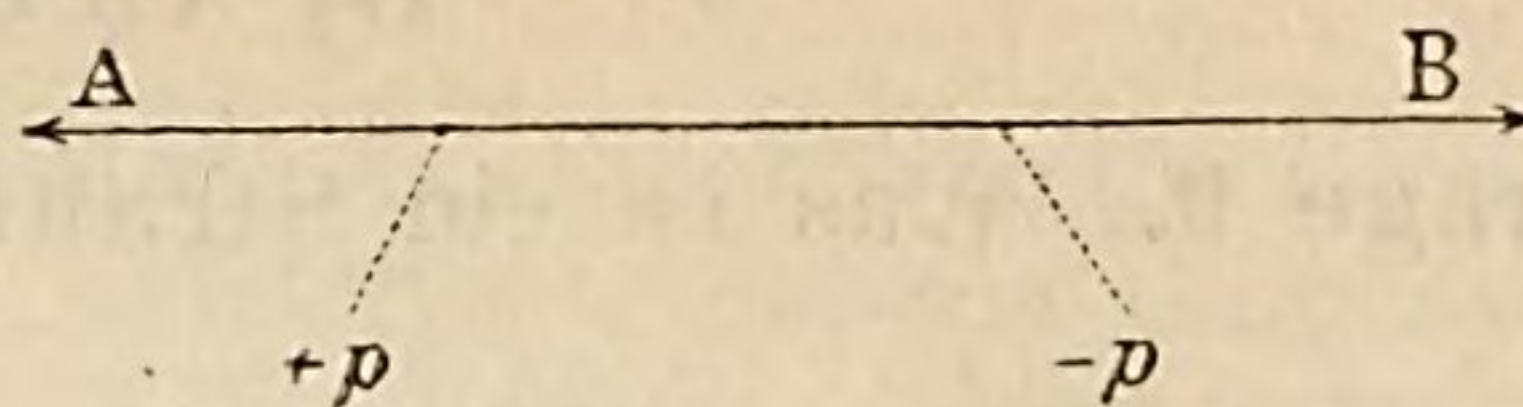
Lehrsatz 2. »Zwei Punkte, welche einer geraden Linie angehören, können keiner zweiten geraden Linie angehören.«

als zwei solche Punkte betrachten, welche nach der in Antwort auf Frage 3 gegebenen Definition der Entstehungsweise einer geraden Linie, ursprünglich eine ununterbrochene Aufeinanderfolge bildeten, wie in der Figur 6 angedeutet wurde, oder welche nach der Erkl. 18 ursprünglich ein Linienelement bildeten.

Würden dieselben Punkte $+p$ und $-p$ einer zweiten geraden Linie angehören, so könnte man sie in derselben Weise als ein ursprüngliches Linienelement dieser Geraden betrachten.

Denkt man sich nun in beiden Fällen jenes ursprüngliche Linienelement wieder hergestellt, also in beiden Fällen auf dieselbe Weise den einen Punkt an den andern gelagert, so muss man in beiden Fällen dasselbe Linienelement erhalten. Da aber nach dem Lehrsatz 1 eine gerade Linie durch jenes Linienelement eindeutig bestimmt ist, so können jene der Geraden AB angehörenden Punkte $+p$ und $-p$, wie vorstehend angenommen wurde, nicht auch noch einer zweiten Geraden angehören.

Figur 10.



Frage 7. Welche Sätze ergeben sich aus dem in voriger Antwort aufgestellten Lehrsatz 2.

Erkl. 35. Die Lehrsätze 4 und 5 bedürfen als Folgerungen aus einer anerkannten Wahrheit keines weiteren Beweises.

Erkl. 36. Nach dem nebenstehenden Lehrsatz 3 kann man durch zwei bestimmte Punkte nur eine einzige Gerade gezogen denken bzw. ziehen.

Antwort. Aus dem in voriger Antwort Gesagten ergeben sich als Folgerungen die Sätze:

Lehrsatz 3. »Es gibt nur eine einzige gerade Linie, welche zwei bestimmte Punkte enthält.«

Lehrsatz 4. »Eine gerade Linie ist durch zwei beliebige Punkte bestimmt.«

Frage 8. Welche Arten gerader Linien unterscheidet man?

Antwort. Je nachdem eine gerade Linie ohne Anfang und ohne Ende ist, oder einen Anfang aber kein Ende, oder einen Anfang und ein Ende hat, unterscheidet man:

- a) gerade Linien im weitesten Sinne (siehe Antwort auf Frage 1),
- b) Strahlen (siehe den Abschnitt B),
- und
- c) Strecken (siehe den Abschnitt C). (Siehe die späteren Erkl. 58 u. 59.)

B) Ueber den Strahl.

Frage 9. Was ist ein Strahl?

Erkl. 37. Nach nebenstehender Antwort kann man jede gerade Linie als aus zwei Strahlen bestehend betrachten.

Jeden Punkt einer Geraden (ohne Anfang und Ende) kann man als den Anfangspunkt eines Strahls betrachten.

Erkl. 38. Eine solche Aufeinanderfolge von Punkten, welche einen Strahl darstellt, erfüllt einen Raum, und diesen Raum kann man einen „Raumstrahl“ nennen.

Antwort. Jedes Linienelement einer Geraden, d. i. eine Aneinanderreihung zweier aufeinanderfolgender Punkte einer geraden Linie (s. Erkl. 18 und Lehrsatz 1), teilt diese Gerade in zwei Teile, von welchen jeder ein »Strahl« genannt wird; der eine der jenes Linienelement bildenden Punkte heisst der Anfangspunkt des einen Strahls, der andere der jenes Linienelement bildenden Punkte heisst der Anfangspunkt des anderen Strahls.

Jenes Linienelement selbst kann man als den gemeinschaftlichen Anfang beider Strahlen betrachten; es enthält die Anfangspunkte beider Strahlen (siehe Antwort auf Frage 10 und die Erkl. 37 und 38).

Frage 10. Wie kann man sich eine ungefähre Vorstellung oder ein Bild von einem Strahl machen?

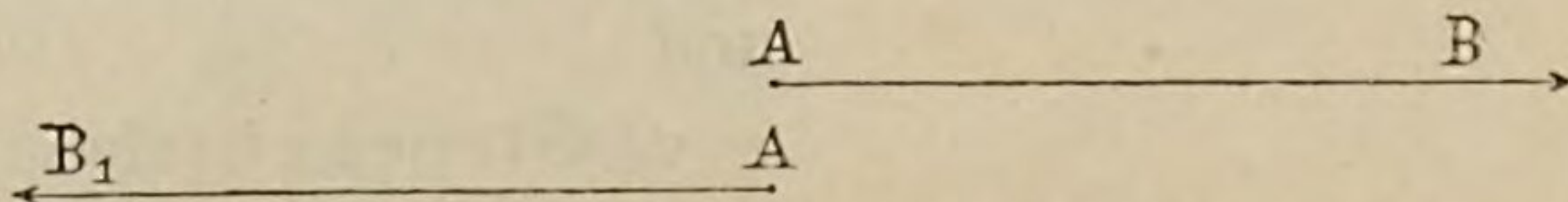
Erkl. 39. Bei jedem der durch die Figur 11 dargestellten Striche muss man einen Anfang, man darf aber kein Ende unterscheiden, wenn derselbe einen Strahl bildlich darstellen soll; man muss sich den Strich deshalb nach der einen oder andern Seite weiter, bis ins Unendliche fortgesetzt denken. Dies ist in der Figur durch eine Pfeilspitze angedeutet (siehe Erkl. 8).

Erkl. 40. Ein Strahl wird gewöhnlich durch zwei lateinische grosse Buchstaben oder auch durch zwei Ziffern bezeichnet, von welchen man, siehe die Figur 11, den einen Buchstaben oder die eine Ziffer an den Anfangspunkt des Strahls, den anderen Buchstaben, bzw. die andere Ziffer an eine beliebige Stelle desselben setzt.

Andere Bezeichnungsweisen sind an geeigneten Stellen angegeben.

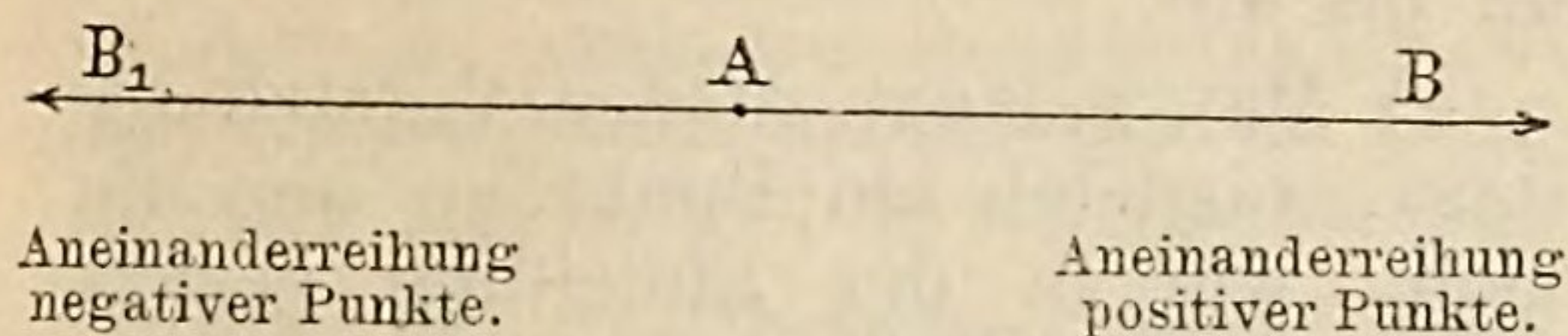
Antwort. Man kann sich eine ungefähre Vorstellung oder ein Bild von einem Strahl machen, indem man, siehe Figur 11, mittels Blei, Kreide, Tinte, Tusche oder eines anderen ähnlichen Materials längs eines Lineals einen möglichst feinen Strich zieht, und diesen Strich als einen solchen Teil einer Geraden betrachtet, der einen Anfang, aber kein Ende hat (siehe die Erkl. 39 und 40).

Figur 11.



Frage 11. Wie kann man sich einen Strahl entstanden denken?

Figur 12.



Erkl. 41. Ist, siehe Figur 12, B_1B eine gerade Linie, welche man sich aus einem bei A befindlichen Linienelement entstanden gedacht denkt, so stellt AB eine Aneinanderreihung positiver Punkte, AB_1 eine Aneinanderreihung negativer Punkte (oder umgekehrt) dar; jede dieser Aneinanderreihungen ist ein Strahl.

Frage 12. Zu welchen Vorstellungen gelangt man mittels der in voriger Antwort gegebenen Definition der Entstehung eines Strahls?

Erkl. 42. Unter „Richtung“ hat man die Art und Weise zu verstehen, wie sich ein Punkt bewegen muss, damit sein Weg oder seine Bahn mit einem (bestimmten) Raumstrahl zusammenfällt.

Erkl. 43. Ein bestimmter Raumstrahl als vorgeschriebener Weg oder als vorgeschriebene Bahn eines in Bewegung gedachten Punktes betrachtet, heisst „Richtungslinie“.

Erkl. 44. Man sagt: die Richtung eines in Bewegung gedachten Punktes bleibt „unverändert“, wenn der Weg oder die Bahn des Punktes stets mit einem (und demselben) Raumstrahl zusammenfällt.

Erkl. 45. Nach dem in den Erkl. 42 bis 44 Gesagten kann man auch einen Raumstrahl als den Weg oder die Bahn eines durch irgend eine Ursache in Bewegung gesetzten Punktes betrachten, der seine Richtung unverändert beibehält.

Erkl. 46. Nach dem in der Erkl. 42 Gesagten bezieht sich der Begriff „Richtung“ nur auf eine Bewegung. Diesen Begriff Richtung kann man dahin erweitern, indem man sagt:

„Ist ein Raumstrahl der Weg oder die Bahn, in welcher sich ein Punkt vom Anfang jenes Raumstrahls aus bewegt, so nennt man den Raumstrahl selbst die Richtung des in Bewegung befindlichen Punktes (siehe Erkl. 47).“

Antwort. Einen Strahl kann man sich entstanden denken, indem man sich eine gerade Linie entstanden denkt, wie in Antwort auf Frage 3 angegeben ist, und dabei berücksichtigt, dass, siehe Figur 12, die mit dem Vorzeichen $+$ bezeichneten, sogenannten positiven Punkte $+p_1, +p_2, +p_3 + \dots$ eine Aneinanderreihung bilden, welche ein Strahl genannt wurde, dass desgleichen die mit dem Vorzeichen $-$ bezeichneten, sogenannten negativen Punkte $-p_1, -p_2, -p_3 \dots$ eine Aneinanderreihung bilden, welche ebenfalls ein Strahl heisst (s. Erkl. 41).

Antwort. Mittels der in voriger Antwort gegebenen Definition der Entstehung eines Strahls gelangt man hinsichtlich des in Antwort auf Frage 4 Gesagten zu folgenden Vorstellungen:

1) Man gelangt zu der Vorstellung, dass mit einem Strahl zugleich ein zweiter Strahl entsteht.

2) Man gelangt zu der Vorstellung, dass ein Raumstrahl, siehe Erkl. 38, auch als der Weg oder die Bahn, siehe Erkl. 20, eines an einer bestimmten Stelle, in dem Anfang des Raumstrahls befindlichen und durch irgend eine Ursache einmal in Bewegung gesetzten Punktes betrachtet werden kann.

3) Man gelangt zu der Vorstellung, dass eine Raumlinie als aus zwei Raumstrahlen bestehend, bzw. nach dem unter 2) Gesagten als die Wege oder Bahnen zweier an einer bestimmten Stelle (dem gemeinschaftlichen Anfang beider Raumstrahlen) befindlichen und durch irgend eine und dieselbe Ursache einmal in Bewegung gesetzten Punkte betrachtet werden, welche infolge ihrer einmal angenommenen Bewegung die Eigenschaft haben, dass

Erkl. 47. Von den beiden Strahlen, aus welchen man nach der Erkl. 37 eine gerade Linie als bestehend betrachten kann, oder welche bei einer gedachten Entstehung nach Antwort auf Frage 11 zusammen entstehen, sagt man: sie haben „entgegengesetzte Richtungen“, siehe Erkl. 46, man nennt die eine die positive, die andere, dieser entgegengesetzten, die negative Richtung; den Strahl, welchem man die positive Richtung beilegt, bezeichnet man durch $+$, im Gegensatz hierzu bezeichnet man den Strahl, welchem man die entgegengesetzte Richtung beilegt, mit $-$.

Anschliessend an die Erkl. 19 und 41 kann man auch sagen: die Richtung des Strahls, welcher aus positiven Punkten besteht, ist positiv; die Richtung des Strahls, welcher aus negativen Punkten besteht, ist negativ.

Dementsprechend sagt man: die Richtung des Strahls AB , siehe die Figur 12 und die Figur 13, ist positiv, die des Strahls AB_1 ist negativ und bezeichnet dies durch die den zwei Pfeilen beige-setzte Zeichen $+$ und $-$, wie in der Figur 13 angedeutet ist.

Erkl. 48. Nach der Erkl. 37 kann man jeden Punkt einer Geraden (ohne Anfang und Ende) als den Anfangspunkt eines Strahls betrachten; dieser gedachte Strahl kann nach der Erkl. 47 zwei entgegengesetzte Richtungen haben, diese Zweideutigkeit fällt weg, wenn bestimmt ist, dass noch ein zweiter Punkt der Geraden dem Strahl angehören soll.

Erkl. 49. Die Richtung, d. i. nach der Erkl. 46 ein bestimmter Raumstrahl, in welcher sich ein Punkt, wie in Antwort auf Frage 11 erwähnt, bewegen muss, damit sich andere Punkte an denselben in der gedachten Weise ununterbrochen anreihen können, wodurch schliesslich etwas entsteht, das eine endliche oder messbare oder dimensionale (von dem lateinischen Wort: Dimensio, d. h. Abmessung, siehe die spätere Erkl. 94) Ausdehnung hat, heisst „Ausdehnungsrichtung“ (siehe die Einleitung).

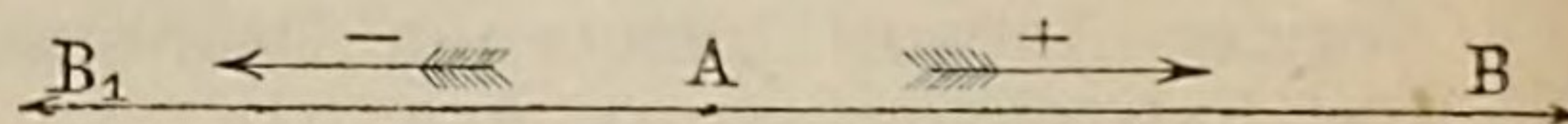
Raumgrössen, bei welchen man nur eine Ausdehnungsrichtung unterscheidet, wie z. B. die Strahlen (auch gerade Linien im allgemeinen) heissen eindimensionale Raumgrössen; diesem analog heissen andere Raumgrössen, bei welchen man zwei, bzw. drei, vier Ausdehnungsrichtungen unterscheiden kann: zwei-, drei-, vierdimensionale Raumgrössen.

Erkl. 50. Von einem Strahl sagt man auch, er habe in allen Punkten dieselbe Richtung.

sie auseinanderlaufen, lat. divergieren, oder wie man zu sagen pflegt, bei ihrer Bewegung entgegengesetzte Richtungen haben (siehe die Erkl. 42 bis 48).

4) Man gelangt zu der Vorstellung, dass, obgleich ein Punkt an und für sich, wie in der Einleitung gesagt, keine wahrnehmbare Ausdehnung hat, eine solche Aneinanderreihung von Punkten, welche einen Strahl (oder eine gerade Linie, dieselbe als einen Strahl betrachtet, dessen Anfangspunkt im Unendlichen liegt) bildet, eine wahrnehmbare Ausdehnung in einer aber nur einer bestimmten Richtung hat (s. Erkl. 49).

Figur 13.



Frage 13. Was kann man hinsichtlich des Vorstehenden von einem Strahl aussagen?

Antwort. Von einem Strahl kann man folgendes aussagen:

Erkl. 51. Nebenstehender Lehrsatz 5 bedarf keines besonderen Beweises; die Wahrheit der in demselben ausgesprochenen Behauptung ist eine Anwendung des Satzes:

„Jeder Teil einer Raumgrösse, welcher ähnlich der Raumgrösse selbst ist, besitzt als solcher die sämtlichen wesentlichen oder Grundeigenschaften der betreffenden Raumgrösse (siehe Erkl. 4 und Antwort auf Frage 25).“

Erkl. 52. Die Richtigkeit der in nebenstehendem Lehrsatz 6 ausgesprochenen Behauptung ergibt sich direkt aus den Antworten der Fragen 9 und 11.

Erkl. 53. Die Richtigkeit des Lehrsatzes 7 ergibt sich aus dem Lehrsatz 4 und der Erkl. 37.

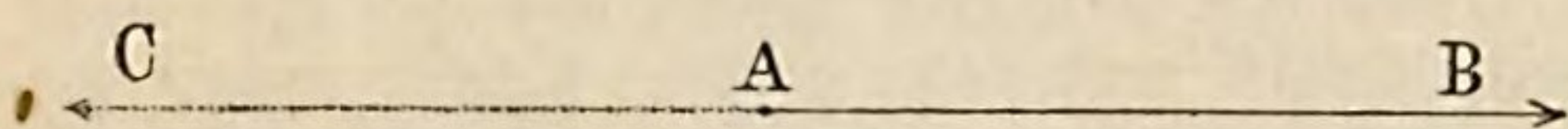
Lehrsatz 5. Jeder Strahl hat als Teil einer Geraden die Grundeigenschaften einer Geraden (siehe Erkl. 4 und 51).

Lehrsatz 6. Zu jedem Strahl gehört ein zweiter Strahl, welcher mit jenem Strahl zusammen eine Gerade bildet (s. Erkl. 52).

Lehrsatz 7. Ein Strahl ist vollkommen (eindeutig) bestimmt durch seinen Anfangspunkt und irgend einen andern Punkt (siehe Erkl. 52).

Frage 14. Was versteht man unter der Verlängerung eines Strahls?

Figur 14.



Erkl. 54. Von der Verlängerung eines Strahls in der Richtung des Strahls selbst kann man nicht sprechen, da der Strahl (in seiner Richtung) ohne Ende ist. Die in Antwort auf Frage 14 erwähnte Verlängerung eines Strahls nennt man auch Rückwärtsverlängerung des Strahls, obgleich es, wie soeben gesagt, keine Vorwärtsverlängerung (d. i. eine Verlängerung in der Richtung) des Strahls im eigentlichen Sinne gibt.

Ebenso kann man auch nicht von einer Verlängerung einer Geraden sprechen, da letztere nach Antwort auf Frage 1 ohne Anfang und ohne Ende ist.

Erkl. 55. In Figur 14 ist nur zum Zweck der Unterscheidung des Strahles AB von seiner Verlängerung AC letztere durch eine (unterbrochene) Punktreihe dargestellt.

Antwort. Denkt man sich einen Strahl über seinen Anfangspunkt so fortgesetzt, dass die Fortsetzung mit dem Strahl eine Gerade bildet, so nennt man diese Fortsetzung des Strahls eine Verlängerung desselben (siehe Erkl. 54 und 55).

In Figur 14 stellt AC die Verlängerung des Strahls AB dar; umgekehrt kann man auch AB als die Verlängerung des Strahls AC betrachten.

Frage 15. Was kann man von der Verlängerung eines Strahls aussagen?

Erkl. 56. Die Richtigkeit des Lehrsatzes 8 ergibt sich aus den Antworten auf die Fragen 9 und 14 und der Erkl. 54.

Antwort. Von der Verlängerung eines Strahls kann man folgendes aussagen:

Lehrsatz 8. Es gibt nur eine einzige Verlängerung eines Strahls (siehe Erkl. 56).

C) Ueber die Strecke.

1) Ueber die Strecke im allgemeinen.

Frage 16. Was ist eine Strecke?

Erkl. 57. Unter „Grenze“ versteht man das Aeusserste, über welches hinaus etwas aufhört als solches zu bestehen (s. die Einleitung).

Erkl. 58. Nach den in den Antworten auf die Fragen 1, 9 und 16 gegebenen Definitionen einer geraden Linie, eines Strahls und einer Strecke hat eine gerade Linie weder Anfangs- noch Endpunkt; ein Strahl hat einen Anfangspunkt und eine Strecke hat einen Anfangs- und einen Endpunkt (oder zwei Endpunkte).

Erkl. 59. Strecken, Strahlen und gerade Linien, wie sie in den Antworten auf die Fragen 16, 9 und 1 definiert sind, bezeichnet man oft auch ganz allgemein mit dem Namen „gerade Linien“. Man nennt eine Strecke eine beiderseitig begrenzte gerade Linie; einen Strahl nennt man eine einseitig begrenzte gerade Linie und eine gerade Linie, wie sie in Antwort auf Frage 1 definiert ist, nennt man eine unbegrenzte gerade Linie.

Erkl. 60. Nach nebenstehender Antwort sind die Grenzen einer Strecke Punkte.

Erkl. 61. Ein solcher Raum, welcher von einer Strecke erfüllt gedacht werden kann, heisst „Raumstrecke“ (siehe Erkl. 76).

Erkl. 62. Jeder Teil einer Strecke ist wieder eine Strecke.

Frage 17. Wie kann man sich eine Vorstellung oder ein Bild von einer Strecke machen?

Figur 15.

A B

Erkl. 63. Eine Strecke wird gewöhnlich, wie in der Figur 15 angedeutet ist, durch zwei grosse lateinische Buchstaben oder auch durch zwei Ziffern bezeichnet, von welchen der eine Buchstabe bzw. die eine Ziffer an den einen Endpunkt der Strecke und der andere Buchstabe bzw. die andere Ziffer an den andern Endpunkt derselben gesetzt wird. Eine Strecke wird auch, wie in der Figur 16 angedeutet ist, durch einen kleinen lateinischen Buchstaben oder durch eine Ziffer bezeichnet, die man zwischen Anfang und Ende an eine beliebige Stelle der Strecke setzt.

Antwort. Eine Strecke ist ein Teil eines Strahls, welcher zwischen zwei bestimmten Punkten des Strahls liegt; jene beiden bestimmten Punkte, welche die sog. Grenzen, siehe Erkl. 57 und 60, der Strecke bilden, heissen die Endpunkte der Strecke; der eine jener beiden Punkte heisst auch Anfangspunkt, der andere Endpunkt der Strecke (siehe Antwort auf Frage 9 und die Erkl. 58 bis 62).

Antwort. Man kann sich eine Vorstellung oder ein Bild von einer Strecke machen, indem man, siehe Figur 15, mittels Blei, Kreide, Tinte, Tusche oder eines anderen ähnlichen Materials längs eines Lineals einen möglichst feinen Strich zieht und diesen Strich als einen solchen Teil eines Strahls betrachtet, der einen Anfang und ein Ende hat (s. die Erkl. 63 bis 67).

Andere Arten der Bezeichnung von Strecken sind an geeigneten Stellen gegeben (siehe auch Erkl. 64).

Erkl. 64. Von den beiden Begrenzungspunkten einer Strecke pflegt man gewöhnlich den linker Hand gelegenen als Anfangspunkt, den rechter Hand gelegenen als Endpunkt zu betrachten; dementsprechend pflegt man auch die Buchstaben (oder Ziffern), mit welchen eine Strecke bezeichnet wird, in der Reihenfolge von links nach rechts bzw. von unten nach oben zu schreiben und zu lesen (s. Erkl. 67).

Erkl. 65. Jeden der beiden Teile, in welche man sich eine Strecke zerlegt denken kann, kann man als einen Teil eines Strahls betrachten; rücksichtlich dessen und des in der Erkl. 47 Gesagten, sagt man auch: jene beiden Teile (Teilstrecken) haben entgegengesetzte Richtungen.

Ist z. B. in Figur 17 ein beliebiges Linienelement durch P bezeichnet, so enthält das Linienelement P die Anfangspunkte der beiden entgegengesetzt gerichteten Strahlen, von welchen die Strecken PA und PB Teile sind; man sagt von den beiden Strecken PB und PA , sie haben entgegengesetzte Richtungen; die eine Strecke PB wird nach der Erkl. 67 von links nach rechts, die andere Strecke PA von rechts nach links gelesen, indem P als der gemeinschaftliche Anfang jener beiden gedachten Strahlen und somit auch als der gemeinschaftliche Anfang der beiden Teilstrecken betrachtet wird.

Die Richtung der einen Strecke nennt man die positive und bezeichnet dies durch das Symbol $+$, die Richtung der anderen Strecke heisst die negative und dies wird durch das Symbol $-$ bezeichnet, analog wie in der Erkl. 47 gesagt wurde.

Erkl. 66. In Figur 17 ist die Richtung der Strecke PB , welche rechts des Teilpunktes P liegt, die positive genannt und dementsprechend mit $+$ bezeichnet, im Gegensatz hierzu ist die Strecke PA die negative genannt und demgemäss mit $-$ bezeichnet.

In Rücksicht auf das vorstehend Gesagte kann man einer für sich bestehenden Strecke, als Teil einer anderen gedacht bzw. als Teil eines Strahls gedacht, zwei entgegengesetzte Richtungen beilegen, man kann ihr entweder die positive oder die ihr entgegengesetzte negative Richtung beilegen.

Erkl. 67. Uebereinstimmend mit der einer Strecke nach der Erkl. 66 einmal beigelegten Richtung pflegt man dieselbe auch zu lesen bzw. zu bezeichnen.

In den Figuren 18 und 19 sind die Richtungen zweier Strecken durch Pfeile angegeben; entsprechend diesen Richtungen bezeichnet man die durch die Figur 18 dargestellte Strecke durch AB , die durch Figur 19 dargestellte Strecke aber durch BA .

Figur 16.

a

Figur 17.

A — P + B

Figur 18.

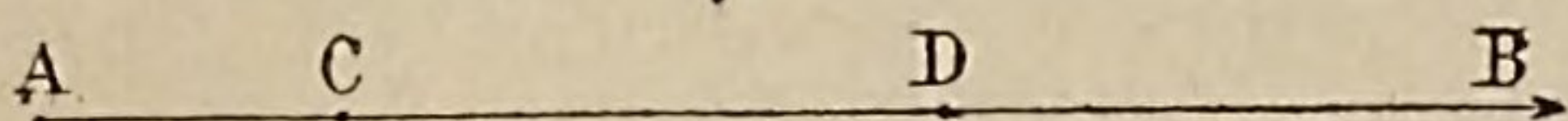
A ← B

Figur 19.

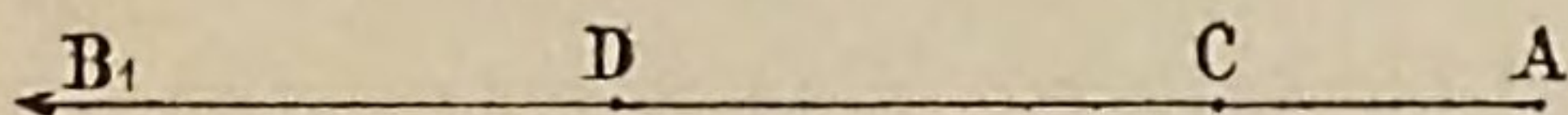
A → B

Frage 18. Wie kann man sich eine Strecke entstanden denken?

Figur 20.



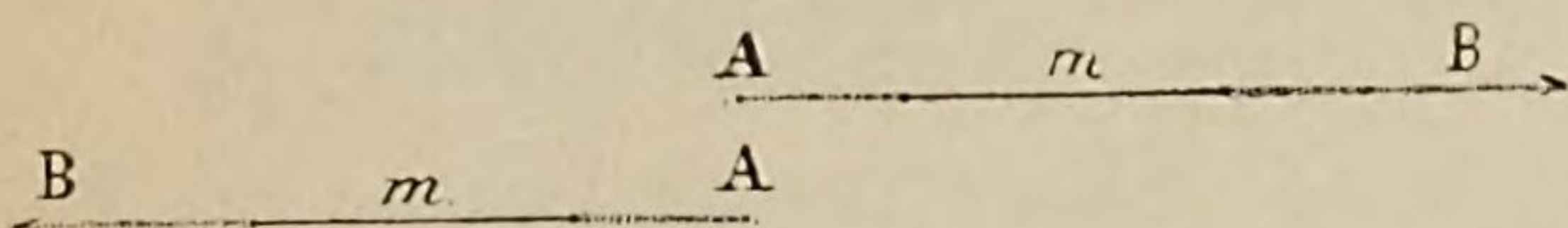
Figur 21.



Erkl. 68. Sind in den Figuren 20 und 21 AB und AB_1 beliebige Strahlen, sind ausser den Anfangspunkten A die Punkte C und D beliebige Punkte dieser Strahlen, so sind in beiden Figuren AC bzw. CD oder AD Teile jener Strahlen oder sog. Strecken; DB und DB_1 sind Strahlen.

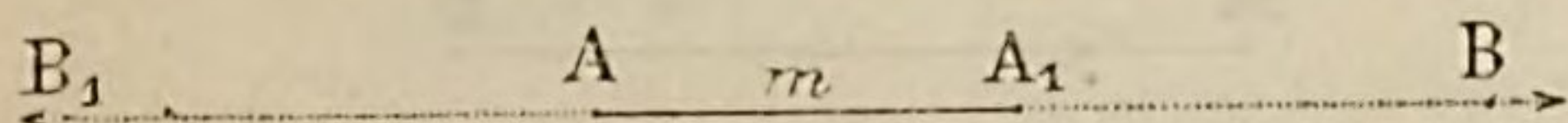
Frage 19. Zu welchen Vorstellungen gelangt man mittels der in voriger Antwort gegebenen Definition der Entstehung einer Strecke?

Figur 22.



Erkl. 69. Die Strecke m in Figur 22 kann man als Teil eines Strahls AB , oder als Teil eines Strahls AB_1 betrachten, der mit jenem Strahl entgegengesetzte Richtung hat.

Figur 23.



Erkl. 70. Die Strecke m in Figur 23 kann man als Teil des Strahls AB betrachten, dessen Anfangspunkt A mit dem einen Endpunkt der Strecke m zusammenfällt; man kann sie auch als Teil des Strahls A_1B_1 betrachten, dessen Anfangspunkt A_1 mit dem andern Endpunkt der Strecke m zusammenfällt.

Antwort. Eine Strecke kann man sich entstanden denken, indem man nach Antwort auf Frage 11 einen Strahl entstanden denkt und berücksichtigt, dass eine Strecke ein Teil eines Strahles ist, welcher zwischen zwei bestimmten Punkten eines Strahls liegt bzw. von diesen Punkten begrenzt wird (siehe Erkl. 68 und 69).

Antwort. Mittels der in voriger Antwort gegebenen Definition der Entstehung einer Strecke und des vorstehenden über eine Strecke Ausgesagten gelangt man zu folgenden Vorstellungen:

1) Man gelangt zu der Vorstellung, dass eine Strecke als ein Teil eines Strahls von bestimmter Richtung bzw. als Teil eines anderen Strahls betrachtet werden kann, der mit jenem eine entgegengesetzte Richtung hat. (siehe die Erkl. 66 und 69).

2) Man gelangt zu der Vorstellung, dass jeder der Endpunkte einer Strecke der Anfangspunkt eines Strahls sein kann, von welchem die Strecke selbst ein Teil ist (siehe Erkl. 70).

3) Man gelangt zu der Vorstellung, dass ein Strahl eine Strecke ist, deren einer Endpunkt im Unendlichen liegend gedacht werden muss.

4) Man gelangt zu der Vorstellung, dass eine Strecke ein im Entstehen, im Werden begriffener Strahl ist.

5) Man gelangt zu der Vorstellung, dass ein Teil eines im Werden begriffenen Strahls (einer Strecke) sich in der Ausdehnungsrichtung des Strahls bewegen muss.

Frage 20. Was kann man hinsichtlich des Vorstehenden von einer Strecke aussagen?

Erkl. 71. Rücksichtlich des Beweises des Lehrsatzes 9 beachte man die Erkl. 51.

Erkl. 72. Die Richtigkeit des Lehrsatzes 10 ergibt sich wie folgt:

Voraussetzung. In Figur 24 seien A und B die Endpunkte einer gedachten Strecke.

Behauptung. Durch die Punkte A und B ist die gedachte Strecke vollkommen bestimmt; d. h. es gibt nur eine Strecke, welche die beiden Punkte A und B als Endpunkte enthält.

Beweis. Da nach dem Lehrsatz 7 durch die beiden Punkte A und B sowohl der Strahl AC , dessen Anfangspunkt der Punkt A ist, als auch der Strahl AC_1 , dessen Anfangspunkt B ist, vollkommen bestimmt ist, und da die Punkte A und B dieselben Teile jener beiden gedachten Strahlen begrenzen und kein anderer Strahl möglich ist, welcher die beiden Punkte A und B enthält, so ergibt sich hieraus, dass durch ihre beiden Endpunkte eine Strecke vollkommen bestimmt ist (siehe Erkl. 73).

Erkl. 73. Jeden der Endpunkte einer Strecke kann man als den Anfangspunkt der Strecke, bzw. als den Anfangspunkt eines solchen Strahls betrachten, von welchem die Strecke ein Teil ist. Man kann somit eine Strecke als den gemeinsamen Teil zweier entgegengesetzt gerichteter Strahlen betrachten, deren Anfangspunkte die Endpunkte jener Strecken sind. Dies ist eine Ergänzung zu dem in der Erkl. 66 Gesagten.

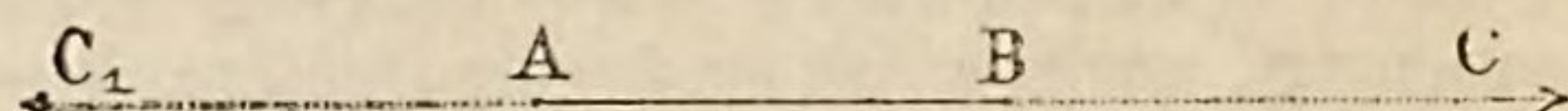
Frage 21. Was versteht man unter einer Verlängerung einer Strecke?

Antwort. Von einer Strecke kann man folgendes aussagen:

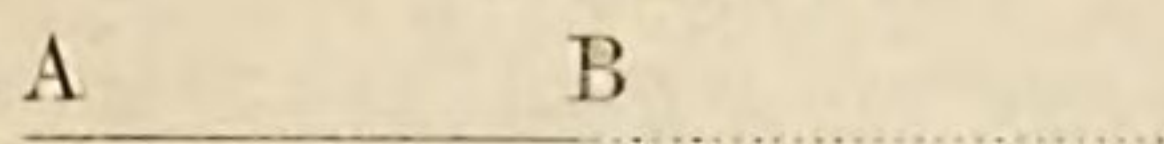
Lehrsatz 9. Jede Strecke hat als Teil eines Strahls die Grundeigenschaften eines Strahls und somit die Grundeigenschaften einer geraden Linie (siehe Lehrsatz 5 und die Erkl. 71).

Lehrsatz 10. Eine Strecke ist vollkommen (oder eindeutig) bestimmt durch ihre beiden Endpunkte, oder durch ihren Anfangs- und ihren Endpunkt (siehe Erkl. 72).

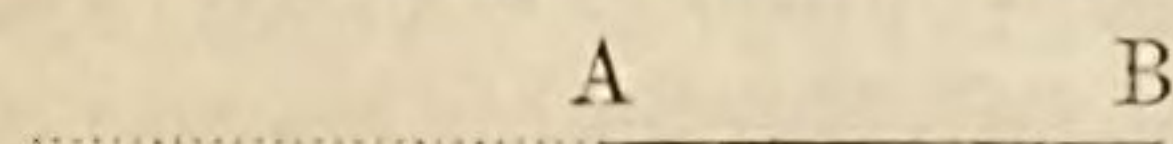
Figur 24.



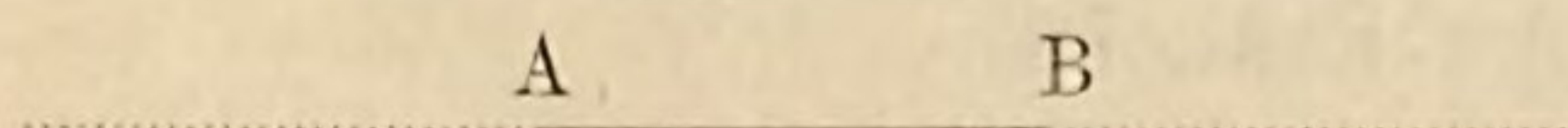
Figur 25.



Figur 26.



Figur 27.



Antwort. Denkt man sich eine Strecke über einen ihrer Endpunkte so fortgesetzt, dass die Fortsetzung mit der Strecke selbst einen Strahl bildet, wie in den Figuren 25 und 26 angedeutet ist, so nennt man eine solche Fortsetzung der Strecke eine Verlängerung derselben über einen ihrer Endpunkte; denkt man sich eine Strecke in der nämlichen Weise über ihre beiden Endpunkte fortgesetzt, siehe Figur 27, so nennt man diese Fortsetzungen der Strecke Verlängerungen derselben über ihre Endpunkte (siehe die Erkl. 74 bis 77).

Erkl. 74. In den Figuren 25 bis 27 sind nur zum Zweck der Unterscheidung der Strecken AB von ihren Verlängerungen letztere durch (unterbrochene) Punktreihen dargestellt.

Erkl. 75. Nach Antwort auf Frage 21 kann man jeden der beiden Endpunkte einer Strecke als den Anfangspunkt eines Strahls betrachten, von welchem die Strecke entweder ein Teil oder eine Verlängerung ist.

Betrachtet man in Figur 28 A als Anfangspunkt eines Strahls AS , so heisst die Strecke AB ein Teil dieses Strahls AS ; betrachtet man hingegen B als Anfangspunkt eines Strahls BS , so wird die Strecke AB eine (bestimmte) Verlängerung des Strahls BS genannt.

Erkl. 76. Durch zwei beliebige Punkte im Raum ist nach den Lehrsätzen 4 und 10 eine Strecke und damit auch eine solche Raumstrecke (siehe Erkl. 61) vollkommen oder eindeutig bestimmt, deren Endpunkte jene Punkte sind. Diese Raumstrecke heisst gerade Entfernung oder kurzweg Entfernung, auch Abstand oder Distanz jener beiden Punkte.

Erkl. 77. Die Entfernungen eines beliebigen Punktes einer Strecke oder deren gedachten Verlängerungen von den beiden Endpunkten der Strecke heissen auch „Abschnitte der Strecke“.

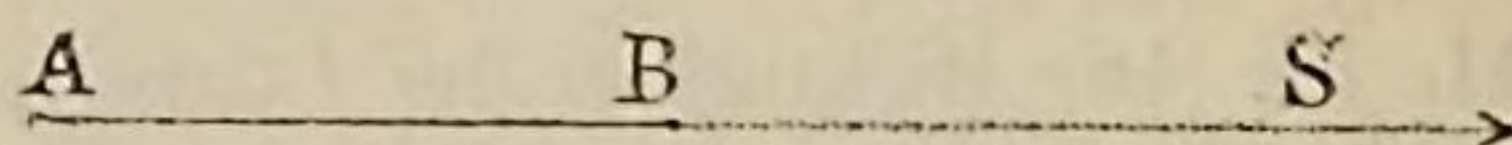
Ist in Figur 29 AB irgend eine Strecke, p ein Punkt derselben, so heissen die Entfernungen dieses Punktes p von den Endpunkten A und B , bezeichnet durch Ap und Bp , die „Abschnitte der Strecke AB “, bzw. die Abschnitte, in welche die Strecke AB durch den Punkt p geteilt wird.

Ist in den Figuren 30 und 31 AB irgend eine Strecke, p ein Punkt einer der Verlängerungen dieser Strecke, so heissen die Entfernungen dieses Punktes p von den Endpunkten A und B , bezeichnet durch Ap und Bp ebenfalls die „Abschnitte der Strecke AB “, bzw. die Abschnitte, in welche die Strecke AB durch den Punkt p geteilt wird.

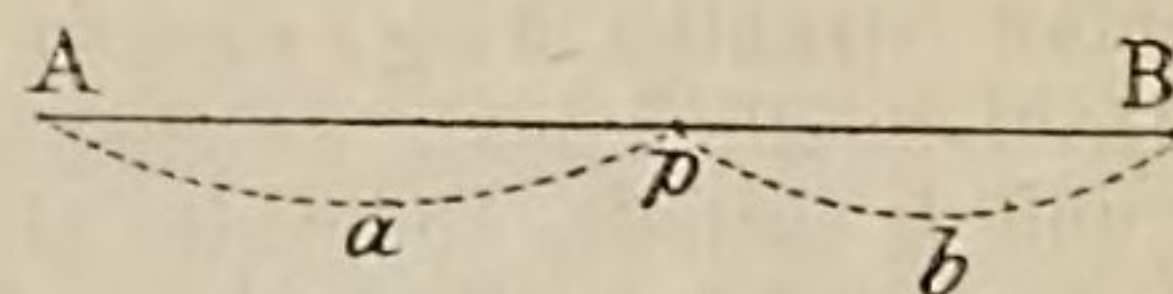
Frage 22. Was kann man von den Verlängerungen einer Strecke aussagen?

Erkl. 78. Die Richtigkeit der in dem Lehrsatz 11 gemachten Aussage ergibt sich aus den Antworten der Fragen 16 und 21.

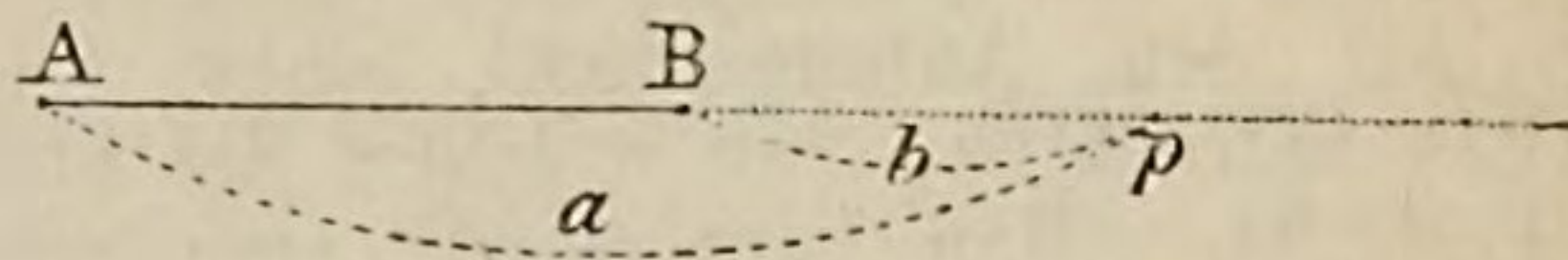
Figur 28.



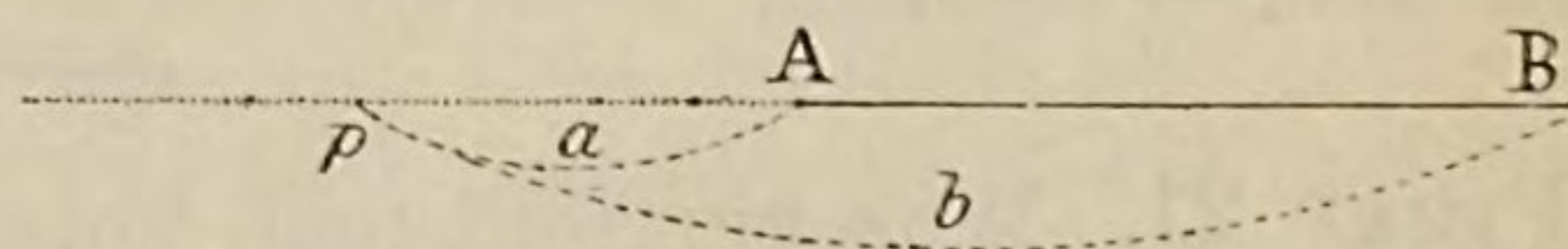
Figur 29.



Figur 30.



Figur 31.



Antwort. Von den gedachten Verlängerungen einer Strecke kann man folgendes aussagen:

Lehrsatz 11. Es gibt nur eine einzige Verlängerung je über den einen oder den andern Endpunkt einer Strecke (siehe Erkl. 78).

2) Ueber das Vergleichen von Strecken.

Frage 23. Was versteht man unter dem Vergleichen im allgemeinen?

Erkl. 79. Unter gleichartigen Grössen versteht man solche, deren Bildungseinheiten in irgend einer Beziehung (die Wahrnehmungen des Menschen betreffend), in welcher sie als gleichartig bezeichnet werden, eine vollkommene, d. h. jede Zwei- und Mehrdeutigkeit ausschliessende Uebereinstimmung zeigen.

Antwort. Im weitesten Sinne ist das Vergleichen die (oft unbewusste) Neben- oder Gegeneinanderstellung von Körpern oder Erscheinungen, durch welche der Mensch zu dem Bewusstsein deren Einerleiheit oder Verschiedenheit rücksichtlich sinnlicher Wahrnehmungen gelangt.

Im engeren Sinne ist das Vergleichen die Vornahme einer (beabsichtigten) Handlung, durch welche die Uebereinstimmung, die Einerleiheit (Identität) oder auch die Verschiedenheit von Grössen in Beziehungen, in welchen sie als gleichartige Grössen betrachtet werden können, festgestellt wird (s. Erkl. 79), durch welche besonders (s. Abschnitt 3): über das Messen) die vollkommene, grössere oder geringere Uebereinstimmung der Mengen der Bildungseinheiten gleichartiger Grössen bestimmt wird.

Frage 24. In welchen Beziehungen kann man die Raumgrössen als gleichartige Grössen betrachten und vergleichen?

Erkl. 80. Alle Raumgrössen haben die wesentlichen oder Grundeigenschaften, dass sie:

- a) aus Mengen oder Mehrheiten von Punkten oder absoluten Einheiten bestehen und dass sie
- b) durch Aneinanderlagerungen von Punkten gebildet werden.

In diesen Beziehungen sind alle Raumgrössen gleichartige Grössen.

Gerade Linien, Strahlen und Strecken sind in Beziehung der besonderen Art und Weise der ununterbrochenen Aneinanderlagerung der sie bildenden Punkte gleichartige Raumgrössen.

Erkl. 81. Unter dem absoluten Wert einer Grösse versteht man die Menge, lat. das Quantum der absoluten Einheiten, welche die Grösse bilden (siehe Antwort auf die Frage 33 und Erkl. 91 a).

Antwort. Die Raumgrössen sind Grössen, deren Bildungseinheiten Punkte sind, welche ununterbrochene Aneinanderlagerungen bilden und in Bezug auf Form oder Gestalt (Ausdehnung) übereinstimmen. In dieser Beziehung sind alle Raumgrössen gleichartige Grössen.

In Rücksicht darauf und rücksichtlich dessen, dass Raumgrössen, wie alle Grössen, auch darin übereinstimmen, dass sie Mehrheiten (Mengen von Punkten, absoluten Einheiten) sind, kann man die Raumgrössen vergleichen:

1) in Beziehung der Mengen ihrer absoluten Einheiten und gleichzeitig in Beziehung ihrer Formen oder Gestalten, d. s. die Arten und Weisen der ununterbrochenen Aneinanderlagerungen ihrer Einheiten (Punkte).

2) in Beziehung ihrer Formen oder Gestalten allein und

3) in Beziehung der Mengen ihrer absoluten Einheiten oder ihrer absoluten Werte allein.

Frage 25. Zu welchen Einerleiheitsbegriffen führt die Vergleichung der Raumgrößen:

- a) in Beziehung der Mengen ihrer absoluten Einheiten und ihrer Formen,
- b) in Beziehung ihrer Formen oder Gestalten allein und
- c) in Beziehung der Mengen ihrer absoluten Einheiten allein.

Erkl. 82. Das Wort „kongruent“ kommt von dem lateinischen Wort: congruere, d. i. übereinstimmen (siehe Erkl. 84).

Erkl. 83. Unter Aehnlichkeit versteht man eine Uebereinstimmung von Raumgrößen hinsichtlich ihrer Form oder Gestalt und zwar ohne Rücksicht ihres absoluten Wertes. Das Zeichen für die Aehnlichkeit ist ein liegendes S in der Form $\approx$; dieses Zeichen ist eine Abkürzung des lateinischen Wortes: similis, d. h. ähnlich (siehe Erkl. 84).

Erkl. 84. Bezeichnet man die eine von zwei gedachten Raumgrößen mit A , die andere mit B und ergab sich:

- a) bei einer Vergleichung in Beziehung der Mengen ihrer absoluten Einheiten, dass beide Raumgrößen in dieser Beziehung keine Verschiedenheit zeigten, dass sie also nach dem in nebenstehender Antwort unter 3) Gesagten „gleich“ sind, so sagt man:

A ist gleich B

und schreibt dies symbolisch:

$$1) \dots A = B$$

oder auch:

$$1a) \dots B = A$$

Solche symbolische Darstellungen heißen „Gleichungen“, das Zeichen $=$ heisst das Gleichheitszeichen. Das was linker Hand des Zeichens $=$ steht, heisst die linke Seite, das was rechter Hand des Zeichens $=$ steht, heisst die rechte Seite der betreffenden Gleichung (siehe Antwort auf Frage 34);

ergab sich ferner:

- b) bei einer Vergleichung in Beziehung der Formen oder Gestalten, dass jene beiden Raumgrößen A und B in dieser Beziehung keine Verschiedenheit zeigten, dass sie also nach dem in nebenstehender Antwort unter 2) Gesagten „ähnlich“ sind, so sagt man:

A ist ähnlich B

und schreibt dies symbolisch:

$$2) \dots A \approx B$$

Antwort. Die Vergleichung der Raumgrößen in den in der Frage unter a) bis c) vorgeführten Beziehungen führte zu folgenden Einerleiheitsbegriffen:

1) wenn zwei (oder mehrere) Raumgrößen sowohl in Beziehung der Mengen ihrer absoluten Einheiten als auch in Beziehung der Arten und Weisen der Nebeneinanderlagerung jener Einheiten, also in Beziehung ihrer Formen oder Gestalten keine Verschiedenheit zeigen, also in beiden Beziehungen vollkommen übereinstimmen, in beiden Beziehungen eine Einerleiheit zeigen, so sagt man, sie sind kongruent (siehe Erkl. 82).

2) wenn zwei (oder mehrere) Raumgrößen in Beziehung ihrer Formen oder Gestalten (in Beziehung der Arten und Weisen der Nebeneinanderlagerungen ihrer absoluten Einheiten) keine Verschiedenheit zeigen, also in dieser einen Beziehung vollkommen übereinstimmen, in dieser einen Beziehung eine Einerleiheit zeigen, so sagt man, sie sind ähnlich (siehe Erkl. 83).

3) wenn zwei (oder mehrere) Raumgrößen in Beziehung der Mengen ihrer absoluten Einheiten (ihrer absoluten Werte) keine Verschiedenheit zeigen, also in dieser einen Beziehung vollkommen übereinstimmen, in dieser einen Beziehung eine Einerleiheit zeigen, so sagt man, sie sind gleich, (siehe die Erkl. 84 und 85).

oder auch:

$$2a) \dots B \sim A$$

Das Zeichen $\sim$ heisst Aehnlichkeitszeichen (siehe Erkl. 83);

ergab sich schliesslich:

- c) bei einer Vergleichen sowohl in Beziehung der Mengen ihrer absoluten Einheiten als auch in Beziehung ihrer Formen oder Gestalten, dass jene beiden Raumgrössen A und B in beiden Beziehungen keine Verschiedenheit zeigten, dass sie also nach dem in nebenstehender Antwort unter 1) Gesagten „kongruent“ sind, so sagt man:

A ist kongruent B

und schreibt dies symbolisch:

$$3) \dots A \cong B$$

oder auch:

$$3a) \dots B \cong A$$

Das Zeichen $\cong$ heisst das Kongruenzzeichen (siehe Erkl. 82), es ist in Rücksicht des vorstehend unter a) und b) Gesagten zusammengesetzt aus dem Aehnlichkeitszeichen $\sim$ und dem Gleichheitszeichen $=$

Erkl. 85. Nach dem in Antwort auf die Frage 25 Gesagten haben Raumgrössen, welche kongruent sind, die Eigenschaft, dass sie ähnlich sind und die Eigenschaft, dass sie gleich sind.

Man kann somit auch sagen:

„Raumgrössen sind kongruent, wenn sie gleich und ähnlich sind.“

Frage 26. Was kann man von zwei Geraden, bzw. von zwei Strahlen rücksichtlich der in voriger Antwort definierten Einerleiheitsbegriffe aussagen:]

Erkl. 86. Der nebenstehende Lehrsatz 12 bedarf keines Beweises, die in demselben enthaltene Aussage ergibt sich als Folgerung aus den in den Antworten auf die Fragen 1 und 3, 9 und 11 gegebenen Definitionen einer Geraden und eines Strahls.

Erkl. 87. Nach nebenstehendem Lehrsatz 12 sind alle Geraden, bzw. alle Strahlen untereinander:

- a) kongruent,
- b) gleich,
- und c) ähnlich.

Antwort. Von zwei Geraden, bzw. von zwei Strahlen kann man die Aussage nehmen:

Lehrsatz 12. Zwei Gerade, bzw. zwei Strahlen stimmen sowohl in Beziehung der Mengen der Punkte, aus welchen sie gebildet gedacht werden, als auch in Beziehung der Arten und Weisen wie die sie bildenden Punkte aneinandergelagert sind, also in Beziehung ihrer sog. Formen oder Gestalten, vollkommen überein, d. h. sie sind kongruent oder gleich und ähnlich (siehe die Erkl. 86 und 87).

Frage 27. Was kann man über zwei Strecken rücksichtlich der in Antwort auf Frage 25 definierten Einerleiheitsbegriffe aussagen?

Erkl. 88. Der nebenstehende Lehrsatz 13 bedarf keines Beweises, die in demselben enthaltene Aussage ergibt sich aus den in den Antworten der Fragen 16 und 18 gegebenen Definitionen einer Strecke.

Erkl. 89. Aus nebenstehendem Lehrsatz 13 ergibt sich, dass alle Strecken untereinander ähnlich sind, dass zwei bestimmte Strecken:

- a) gleich, somit auch kongruent
oder:
b) nur ähnlich
sind.

Antwort. Ueber zwei Strecken kann man die Aussage machen:

Lehrsatz 13. Zwei Strecken stimmen in Beziehung der Arten und Weisen wie die sie bildenden Punkte aneinandergelagert sind, also in Beziehung ihrer sog. Formen, vollkommen überein, d. h. sie sind ähnlich; in Beziehung der Mengen ihrer absoluten Einheiten, aus welchen sie bestehen, also in Beziehung ihrer absoluten Werte kann man zwei Fälle unterscheiden:

- a) die Mengen der sie bildenden Punkte (absoluten Einheiten), ihre absoluten Werte stimmen vollkommen überein, d. h. sie sind gleich,
b) die Mengen der sie bildenden Punkte (absoluten Einheiten), oder ihre absoluten Werte stimmen nicht vollkommen überein, d. h. sie sind verschiedenen oder ungleich.

(Siehe die Erkl. 88 und 89.)

Frage 28. Wie verfährt man im allgemeinen bei der Untersuchung ob zwei Strecken kongruent oder gleich sind?

Erkl. 90. Kann man sich zwei Strecken so neben- oder aufeinandergelegt denken, dass die beiden Endpunkte der einen Strecke, neben oder auf die beiden Endpunkte der anderen Strecke zu liegen kommen, dass also auch jeder Punkt der einen Strecke neben oder auf einen entsprechenden Punkt der andern Strecke zu liegen kommt, so sagt man auch: beide Strecken decken einander.

Antwort. Um zu untersuchen, ob zwei Strecken a und b kongruent oder gleich sind, siehe Erkl. 84 und 89, denkt man sich die eine, z. B. die Strecke b , so neben, bezw. auf die andere, die Strecke a , gelegt, dass einer der Endpunkte der Strecke b neben, bezw. auf einen der Endpunkte der Strecke a zu liegen kommt, dass dasselbe auch zwischen den andern Punkten der beiden Strecken a und b stattfindet; ergibt sich hierbei, dass auch die beiden anderen Endpunkte beider Strecken, in jener gedachten Weise neben, bezw. aufeinander zu liegen kommen, so stimmen beide Strecken in Bezug auf

die Mengen der sie bildenden Punkte überein, d. h. sie sind nach der Erkl. 89 gleich und somit auch kongruent (siehe Erkl. 90).

Frage 29. Was kann man in Bezug auf die Kongruenz zweier Strecken aussagen?

Antwort. In Bezug auf die Kongruenz zweier Strecken kann man die Aussage machen:

Erkl. 91. Die Richtigkeit der in dem Lehrsatz 14 gemachten Aussage ergibt sich aus der Antwort der Frage 28 und der Erkl. 90.

Lehrsatz 14. Zwei (oder mehrere) Strecken sind kongruent (damit auch gleich, siehe Erkl. 89), wenn man sie so neben- oder aufeinandergelegt denken kann, dass sie sich decken, d. h. dass die Endpunkte der einen neben oder auf die Endpunkte der andern zu liegen kommen (siehe Erkl. 91).

3) Ueber das Messen von Strecken.

Frage 30. Was versteht man unter dem Messen im weitesten Sinne?

Antwort. Im weitesten Sinne ist das Messen die Bestimmung der Menge, der Mehrheit oder Anzahl von absoluten Einheiten, aus welchen eine Grösse gebildet gedacht werden muss.

Frage 31. Auf welche Weise kann man die Menge (Mehrheit oder Anzahl) der absoluten Einheiten, aus welcher eine Grösse bestehen muss, bestimmen?

Erkl. 91a. Unter dem wahren Wert einer Grösse versteht man die Menge, die Anzahl der Bildungseinheiten, aus welchen die Grösse besteht.

Bei den Raumgrössen, Strahlen und Strecken sind die Bildungseinheiten zugleich die absoluten Einheiten (siehe Erkl. 81 und Antwort auf Frage 33).

Antwort. Nach dem in der Einleitung Gesagten ist eine absolute Einheit (also eine Bildungseinheit) einer Grösse überhaupt nicht wahrnehmbar, somit ist auch die Anzahl, die Menge der absoluten Einheiten, aus welcher eine wahrnehmbare Grösse bestehend gedacht werden muss, oder der absolute Wert (ebenso der wahre Wert) einer Grösse, an und für sich nicht bestimmbar, siehe die Erkl. 81 und 91a; man kann sich aber eine vergleichende Vorstellung von der Menge der eine wahrnehmbare

(endliche) Grösse bildenden Einheiten machen, wenn man sie mit einer andern wahrnehmbaren Grösse in Beziehung der Mengen ihrer absoluten Einheiten vergleicht, d. h., wenn man diese andere wahrnehmbare Grösse, rücksichtlich ihrer (an und für sich unbestimmten) Menge absoluter Einheiten, aus welchen sie bestehend gedacht werden muss, als normal, d. h. mustergültig, annimmt, diese Grösse selbst in dieser Eigenschaft als sogenannte Norm oder Masseinheit betrachtet und rücksichtlich der Raumerfüllung die vollkommene, grössere oder geringere Uebereinstimmung dieser Masseinheit mit jener Grösse feststellt. Diese Art der Vergleichung zweier Grössen heisst das Messen im gewöhnlichen oder engeren Sinne.

Frage 32. Was versteht man unter dem Messen im gewöhnlichen oder engeren Sinne?

Antwort. Nach voriger Antwort ist das Messen im engeren Sinne, kurzweg Messen genannt, eine Vergleichung zweier (oder mehrerer) Grössen und zwar in Beziehung der Mengen ihrer absoluten Einheiten, in Beziehung ihrer absoluten Werte; es ist die Vornahme eine Handlung, durch welche die vollkommene, grössere oder geringere Uebereinstimmung von Grössen in Beziehung der Raumerfüllung festgestellt wird, wobei eine der Grössen rücksichtlich der (an sich unbestimmt gelassenen) Menge ihrer absoluten Einheiten als sog. Vergleichsgrösse oder als sog. Masseinheit dient.

Frage 33. Worin besteht das Messen einer Grösse und zu welchen weiteren Begriffen führt derselbe?

Antwort. Das Messen einer Grösse besteht im allgemeinen darin, dass man untersucht, wievielmals (lat. quoties) in der zu messenden Grösse, eine andere ihr gleichartige Grösse, die sog. Masseinheit enthalten ist.

Erkl. 92. Nach dem in nebenstehender Antwort Gesagten bezieht sich jede Masszahl auf eine ganz bestimmte Masseinheit.

Diese Untersuchung führt auf den Begriff von Zahlen, durch welche das wievielmals angegeben wird und die man Masszahlen nennt (s. Erkl. 92).

Eine Masszahl drückt eine Beziehung zwischen zwei verglichenen Grössen aus; man kann mittels derselben die eine der Grössen als eine Mehrheit der andern Grösse, letztere als Einheit jener Mehrheit betrachten, welche zum Unterschied der absoluten Einheit jener Grösse eine relative Einheit derselben heisst. Die Menge von relativen Einheiten, welche einer Grösse infolge einer Messung zukommt, heisst der relative Wert oder kurzweg »Wert« der Grösse.

Frage 34. Zu welchen Resultaten gelangt man mittels der Messung mehrerer Grössen durch ein- und dieselbe Grösse als Masseinheit?

Erkl. 93. Die nebenstehenden symbolischen Darstellungsformen:

oder: 2) $A > B$

und 2a) . . . $B < A$

oder: 3) $A < B$

3a) . . . $B > A$

heissen entsprechend dem was sie sagen sollen, „Ungleichungen“, das Zeichen $>$ oder $<$ heisst das Ungleichheitszeichen; was linker Hand desselben steht, heisst die linke Seite, was rechter Hand desselben steht, heisst die rechte Seite der Ungleichung.

Die Oeffnung des Zeichens $>$ wird der Seite zugekehrt, welche den grösseren der Werte vorstellt.

Gelesen werden die vorstehenden Gleichungen 2) bis 3a) bzw.:

A grösser als B oder B kleiner als A

und

A kleiner als B oder B grösser als A .

Erkl. 94. Durch die Angabe der Anzahl relativer Einheiten, aus welchen eine Grösse infolge gemachter Messung mit einer andern ihr gleichartigen Grösse, welche jene relative Einheit ist, als bestehend angenommen werden muss, wird die sog. Grösse oder die Stärke, lat. die Intensität, oder auch die sog. Dimension (lat., d. h. Abmessung) ausgedrückt und symbolisch dargestellt.

Antwort. Werden mehrere, z. B. zwei Grössen A und B mittels ein- und derselben dritten Grösse als Masseinheit gemessen, so kann man hierbei zu zwei Resultaten gelangen, nämlich:

a) die Masszahlen der Grössen A und B sind dieselben,

b) die Masszahl der Grösse A ist eine grössere oder eine kleinere als die der Grösse B .

Im 1. Fall stimmen die beiden Grössen A und B sowohl in Beziehung der Mengen der betr. relativen als auch in Beziehung der Mengen ihrer absoluten Einheiten vollkommen überein; man sagt, die beiden Grössen sind gleich und drückt diese Beziehung symbolisch aus durch:

1) $A = B$
oder: 1a) . . . $B = A$ } (siehe Erkl. 84)

Im 2. Fall stimmen die beiden Grössen A und B in Beziehung der Mengen der betr. relativen, als auch in Beziehung der Mengen ihrer absoluten Einheiten nicht überein; man sagt, die beiden Grössen sind in dieser Beziehung verschieden, oder auch, sie sind ungleich und drückt diese Beziehung, je nachdem für A eine gröss-

Diese Bezeichnungen, Grösse, Stärke oder Intensität entstammen der Vorstellung, dass man mittels jener Angaben auf das grössere oder geringere, stärkere oder schwächere Vorhandensein der Eigenschaften schliessen kann, welche die Grundeigenschaften der in Betracht gezogenen Grössen sind.

Die Bezeichnung Dimension (vom latein. *dimensio*, d. h. Abmessung) rührt daher, dass jene Angabe das Resultat einer Messung ist.

Erkl. 95. Die Bestimmung der Anzahl bestimmter relativer Einheiten, aus welchen eine Grösse bestehen kann, kann im allgemeinen auf zwei Arten erfolgen, nämlich:

- a) direkt durch Messung oder Beobachtung
- und
- b) indirekt durch Rechnung.

Zur direkten Bestimmung des relativen Wertes (des Wertes) einer Grösse durch Messung oder Beobachtung sind Instrumente oder Hilfswerkzeuge erforderlich; zur indirekten Bestimmung des Wertes einer Grösse müssen Beziehungen, sog. Relationen, zwischen diesen und andern Grössen, deren relativer Wert bereits bekannt ist, gegeben sein.

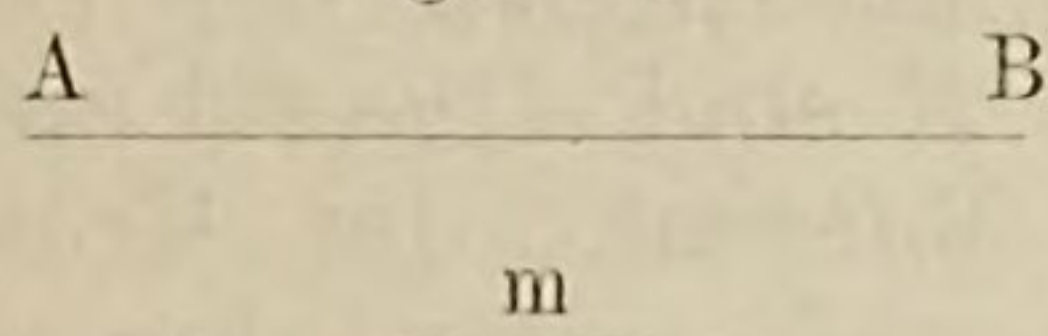
sere oder kleinere Masszahl gefunden wurde als für B , symbolisch aus durch:

2) $A > B$	} (siehe Erkl. 93)
oder was dasselbe sagt:	
2a) $B < A$	
bezw. durch:	
3) $A < B$	}
oder was dasselbe sagt:	
3a) $B > A$	

(Siehe auch die Erkl. 94 und 95.)

Frage 35. Was versteht man unter dem Messen einer Strecke?

Figur 32.



Erkl. 96. Zu dem Messen einer Strecke bedient man sich im allgemeinen eines sogen. Massstabes, d. i. eines Stücks irgend eines Materials, welches an einer Stelle sämtliche Grundeigenschaften einer Strecke besitzt.

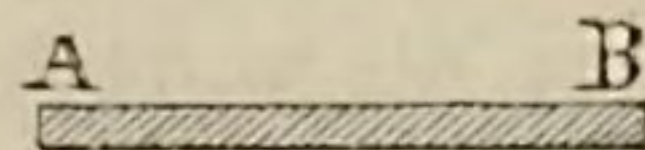
Figur 33 möge ein solches Stück eines Materials, z. B. ein Stück Holz veranschaulichen, welches an der Stelle AB sämtliche Grundeigenschaften einer Strecke besitzt (siehe auch die Erkl. 110 und die Figur 35).

Erkl. 97. Eine Strecke AB wird mit einem Massstabe m (siehe Erkl. 96) gemessen, indem man denselben so an die Strecke AB legt, dass einer der Endpunkte des Massstabes m auf den Anfangspunkt A der Strecke AB zu liegen kommt; hierauf wird auf der Strecke AB die Stelle markiert, in welcher sich das andere Ende des Massstabes m befindet. Alsdann legt man den Massstab m in derselben Weise an die Strecke AB , dass jetzt das eine Ende desselben auf jenen markierten Punkt der Strecke AB zu liegen kommt, u. s. f.

Die Zahl, welche angibt, wievielmals oder wieoftmal dieses Aneinanderlegen eines Mass-

Antwort. Unter dem Messen einer Strecke AB , siehe Figur 32, versteht man die Bestimmung derjenigen Zahl z , »Masszahl« genannt, welche angibt, wievielmals eine im allgemeinen beliebig gewählte andere Strecke m , die sog. Masseinheit, in jener Strecke AB enthalten ist (siehe Erkl. 96 und 97).

Figur 33.



stabes auf einer zu messenden Strecke erforderlich ist, damit bei dem letzten Auflegen des Massstabes m dessen Ende auf den Endpunkt B der Strecke AB fällt, ist die gesuchte Masszahl der zu messenden Strecke AB . Fällt bei dem letzten Auflegen des Massstabes dessen eines Ende nicht auf den Endpunkt B der zu messenden Strecke (was in den meisten Fällen stattfinden wird), so muss man mit einem kleineren Massstab als Masseinheit messen (siehe die Erkl. 102).

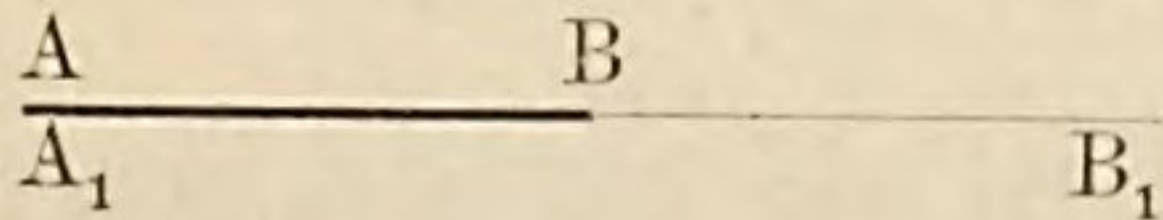
Frage 36. Was versteht man unter der Grösse einer Strecke?

Erkl. 98. Die Grösse einer Strecke wird auch Länge, oder auch Dimension genannt, siehe Erkl. 94.

Die Masseinheit, in welche die Grösse oder die Länge einer Strecke ausgedrückt ist, wird dementsprechend auch Längenmasseinheit oder Längeneinheit, Dimensionseinheit genannt. Die Länge als Bezeichnung jener Dimension, wird auch zum Unterschied von andern Dimensionen „Längendimension“ genannt.

Frage 37. Wenn sagt man: eine Strecke ist grösser oder kleiner, als eine andere Strecke?

Figur 34.



Erkl. 99. Nach dem in den Antworten auf die Fragen 36 und 37 Gesagten ist eine Strecke a grösser oder kleiner als eine andere Strecke b , je nachdem die auf eine bestimmte Längeneinheit sich beziehende Masszahl der Strecke a grösser oder kleiner als die auf dieselbe Längeneinheit sich beziehende Masszahl der Strecke b ist.

Erkl. 100. Ergibt sich bei dem Messen zweier Strecken durch eine und dieselbe Längeneinheit, durch ein und dasselbe Mass, dass sich die Längen beider Strecken in ganze Masszahlen ausdrücken lassen, so sagt man, die beiden Strecken haben ein gemeinschaftliches Mass, sie sind nach oder mit demselben Mass messbar, lat. sie sind commensurabel; ist jenes nicht der Fall, so sagt man im Gegensatz hierzu, sie sind incommensurabel.

Antwort. Unter der Grösse einer Strecke versteht man die Angabe der Anzahl derjenigen Masseinheiten, welche sich bei dem Messen einer Strecke ergeben (siehe Erkl. 98).

Antwort. Liegen, siehe Figur 34, zwei Strecken AB und A_1B_1 so aufeinander, dass z. B. die Endpunkte A und A_1 aufeinander liegen und der Endpunkt B der Strecke AB auf einem Punkt der Strecke A_1B_1 liegt, bezw. dass der Endpunkt B_1 der Strecke A_1B_1 auf einem Punkt der Verlängerung der Strecke AB liegt, so sagt man, die Strecke AB ist kleiner als die Strecke A_1B_1 , oder die Strecke A_1B_1 ist grösser als AB (siehe Erkl. 99 und 100).

Frage 38. Welche Strecke wird zum Messen von Strecken als Masseinheit (Längenmasseinheit oder Längen-

geneinheit) angenommen und welchen besonderen Namen führt diese Strecke?

Erkl. 101. Zum Messen einer Strecke kann man jede beliebige Strecke als Längenmasseinheit oder als Mass wählen, siehe Antwort auf Frage 35). Früher war es üblich, dass fast jede Staats- und Kommunalbehörde eine andere Strecke als Längenmasseinheit zur Ausführung der im bürgerlichen Leben vorkommenden Längenmessungen gesetzlich feststellte. Infolge dieser verschiedenen Masseinheiten wurden in den verschiedenen Städten und Ländern für kongruente Strecken ganz verschiedene Masszahlen, Längen oder Grössen angegeben und dies führte zu mancherlei Unzuträglichkeiten.

Man suchte daher eine allgemeine Längenmasseinheit einzuführen.

Im Jahre 1791 wurde in Frankreich festgesetzt, dass der 40millionste Teil eines Erdmeridians oder der 10millionste Teil eines Erdmeridianquadranten als Längenmasseinheit dienen soll.

Zu diesem Zwecke wurde in den Jahren 1792—1808 eine nochmalige genaue Messung des durch die Pariser Sternwarte gehenden Erdmeridians vorgenommen, wobei sich ergab, dass der 10millionste Teil eines Quadranten dieses Erdmeridians = 443,296 alte Pariser Linien ist.

Diese Längenmasseinheit, das Meter, wurde mit der Zeit in fast allen zivilisierten Staaten als solche gesetzlich eingeführt; in Deutschland geschah dies am 1. Januar 1872.

Erkl. 102. Eine Strecke wird durch das Meter als Längenmasseinheit so, wie in Erkl. 97 angegeben ist, gemessen.

Hierbei kann, wie in jener Erkl. 97 schon erwähnt, der Fall eintreten, dass das Meter nicht genau in der zu messenden Strecke enthalten ist, dass das Meter kein aliquoter Teil der zu messenden Strecke ist, siehe Erkl. 103, dass also noch ein Teil der zu messenden Strecke durch das Meter nicht gemessen werden kann.

Um solche Strecken zu messen, welche kleiner als ein Meter sind, die also durch das Meter direkt nicht gemessen werden können, bedient man sich als Längenmasseinheit bestimmter Teile eines Meters und untersucht, wie oft solche bestimmte Teile eines Meters aneinandergelegt eine Strecke ergeben, die gleich der zu messenden Strecke ist.

Diese Teile eines Meters werden dadurch festgestellt, dass man das Meter in 10 gleiche Teile teilt, von welchen jeder Teil den Namen „Decimeter“ führt, siehe Erkl. 107, jeden dieser Teile wieder in 10 gleiche Teile teilt, von welchen jeder den Namen „Centimeter“ führt, siehe Erkl. 107, und jeden der letzteren abermals in 10 gleiche Teile teilt, von welchen jeder den Namen „Millimeter“ führt (siehe Erkl. 107).

Antwort. Beim Messen von Strecken wird als Masseinheit (Längenmasseinheit oder Längeneinheit) diejenige Strecke angenommen, welche gleich dem 10millionsten Teil eines Erdmeridianquadranten oder gleich dem 40millionsten Teil eines Erdmeridians ist; diese Strecke führt als Längenmasseinheit den besonderen Namen »das Meter« (siehe die Erkl. 101 bis 110).

Erkl. 103. Ein aliquoter Teil (lat. aliquot, etliche, irgendwieviel) oder ein irgendwievielter Teil einer Grösse ist eine andere Grösse, von welcher jene ein Vielfaches ist, das in ganze Zahlen ausgedrückt werden kann.

Eine Strecke, welche sich auf eine andere ohne Rest abtragen lässt, ist ein aliquoter Teil der letzteren.

Erkl. 104. Die durch Messung gefundene Länge einer Strecke wird, wie folgt bezeichnet:

a) hat man gefunden, dass bei dem Messen einer Strecke a das Meter z. B. genau 6mal in derselben enthalten ist, so sagt man: die Strecke ist 6 Meter lang und bezeichnet dies durch:

$$\begin{aligned} a &= 6 \text{ Meter} \\ \text{oder: } a &= 6 \text{ m (siehe Erkl. 108)} \end{aligned}$$

b) hat man gefunden, dass bei dem Messen einer Strecke a das Meter z. B. genau 8mal und das Decimeter z. B. genau 5mal in derselben enthalten ist, so sagt man: die Strecke ist 8 Meter 5 Decimeter lang und bezeichnet dies durch:

$$\begin{aligned} a &= 8 \text{ Meter } 5 \text{ Decimeter} \\ \text{oder: } a &= 8 \text{ m } 5 \text{ dm} \\ \text{oder: } a &= 8,5 \text{ m} \\ \text{oder: } a &= 85 \text{ dm} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} a &= 8 \text{ Meter } 5 \text{ Decimeter} \\ \text{oder: } a &= 8 \text{ m } 5 \text{ dm} \\ \text{oder: } a &= 8,5 \text{ m} \\ \text{oder: } a &= 85 \text{ dm} \end{aligned}} \right\} \text{ (siehe Erkl. 107 und 108)}$$

c) hat man gefunden, dass bei dem Messen einer Strecke a das Meter z. B. genau 3mal, das Decimeter z. B. genau 9mal und das Centimeter z. B. genau 4mal in derselben enthalten ist, so sagt man: die Strecke a ist 3 Meter 9 Decimeter und 4 Centimeter lang und bezeichnet dies durch:

$$\begin{aligned} a &= 3 \text{ Meter } 9 \text{ Decimeter } 4 \text{ Centimeter} \\ \text{oder: } a &= 3 \text{ m } 9 \text{ dm } 4 \text{ cm} \\ \text{oder: } a &= 3,94 \text{ m} \\ \text{oder: } a &= 39,4 \text{ dm} \\ \text{oder: } a &= 394 \text{ cm} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} a &= 3 \text{ Meter } 9 \text{ Decimeter } 4 \text{ Centimeter} \\ \text{oder: } a &= 3 \text{ m } 9 \text{ dm } 4 \text{ cm} \\ \text{oder: } a &= 3,94 \text{ m} \\ \text{oder: } a &= 39,4 \text{ dm} \\ \text{oder: } a &= 394 \text{ cm} \end{aligned}} \right\} \text{ (s. Erkl. 107 u. 108)}$$

d) hat man gefunden, dass bei dem Messen einer Strecke a das Meter z. B. genau 7mal, das Decimeter z. B. genau 1mal, das Centimeter z. B. genau 2mal und das Millimeter z. B. genau 6mal in derselben enthalten ist, so sagt man: die Strecke a ist 7 Meter 1 Decimeter 2 Centimeter und 6 Millimeter lang und bezeichnet dies durch:

$$\begin{aligned} a &= 7 \text{ Meter } 1 \text{ Decimeter } 2 \text{ Centimeter } 6 \text{ Millimeter} \\ \text{oder: } a &= 7 \text{ m } 1 \text{ dm } 2 \text{ cm } 6 \text{ mm} \\ \text{oder: } a &= 7,126 \text{ m} \\ \text{oder: } a &= 71,26 \text{ dm} \\ \text{oder: } a &= 712,6 \text{ cm} \\ \text{oder: } a &= 7126 \text{ mm} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} a &= 7 \text{ Meter } 1 \text{ Decimeter } 2 \text{ Centimeter } 6 \text{ Millimeter} \\ \text{oder: } a &= 7 \text{ m } 1 \text{ dm } 2 \text{ cm } 6 \text{ mm} \\ \text{oder: } a &= 7,126 \text{ m} \\ \text{oder: } a &= 71,26 \text{ dm} \\ \text{oder: } a &= 712,6 \text{ cm} \\ \text{oder: } a &= 7126 \text{ mm} \end{aligned}} \right\} \text{ (s. Erkl. 107 und 108)}$$

e) hat man gefunden, dass bei dem Messen einer Strecke a das Meter z. B. gar nicht und das Decimeter z. B. genau 2mal in derselben enthalten ist, so sagt man: die Strecke a ist 2 Decimeter lang und bezeichnet dies durch:

$$\begin{aligned} a &= 2 \text{ Decimeter} \\ \text{oder: } a &= 2 \text{ dm} \\ \text{oder: } a &= 0,2 \text{ m} \end{aligned}$$

f) hat man gefunden, dass bei dem Messen einer Strecke a das Meter z. B. gar nicht, das Decimeter z. B. gleichfalls nicht, das Centimeter z. B. genau 6mal in derselben enthalten ist, so sagt man: die Strecke a ist 6 Centimeter lang und bezeichnet dies durch:

$a = 6$ Centimeter
 oder: $a = 6$ cm
 oder: $a = 0,6$ dm
 oder: $a = 0,06$ m

g) hat man gefunden, dass bei dem Messen einer Strecke a das Meter z. B. gar nicht, das Decimeter z. B. gleichfalls nicht, das Centimeter z. B. desgleichen nicht und das Millimeter z. B. genau 8 mal in derselben enthalten ist, so sagt man: die Strecke a ist 8 Millimeter lang und bezeichnet dies durch:

$a = 8$ Millimeter
 oder: $a = 8$ mm
 oder: $a = 0,8$ cm
 oder: $a = 0,08$ dm
 oder: $a = 0,008$ m

h) hat man gefunden, dass bei dem Messen einer Strecke a das Meter z. B. genau 3 mal, das Decimeter z. B. gar nicht, das Centimeter z. B. genau 7 mal in derselben enthalten ist, so sagt man: die Strecke a ist 3 Meter 7 Centimeter lang und bezeichnet dies durch:

$a = 3$ Meter 7 Centimeter
 oder: $a = 3$ m 7 cm
 oder: $a = 3,07$ m
 oder: $a = 30,7$ dm
 oder: $a = 307$ cm

i) hat man gefunden, dass bei dem Messen einer Strecke a das Meter z. B. gar nicht, das Decimeter z. B. genau 8 mal, das Centimeter z. B. gar nicht, das Millimeter z. B. genau 5 mal in derselben enthalten ist, so sagt man: die Strecke a ist 8 Decimeter 5 Millimeter lang und bezeichnet dies durch:

$a = 8$ Decimeter 5 Millimeter
 oder: $a = 8$ dm 5 mm
 oder: $a = 0,805$ m
 oder: $a = 8,05$ dm
 oder: $a = 80,5$ cm
 oder: $a = 805$ mm

u. s. w.

Erkl. 105. Ist die Länge einer Strecke bedeutend grösser, als das Meter, so drückt man diese Länge gewöhnlich nicht in Meter aus, sondern in Vielfache eines Meters.

Als Vielfache eines Meters wird gleichfalls nach dem Decimalsystem das 10-, 100-, 1000-, 10000 fache eines Meters angenommen.

Das 10 fache eines Meters führt den Namen „Dekameter“, in Zeichen Dm, das 100 fache den Namen „Hektometer“, in Zeichen hm, das 1000 fache den Namen „Kilometer“, in Zeichen km, das 10000 fache den Namen „Myriameter“, in Zeichen Mm (siehe Erkl. 107).

Hat man beim Messen einer Strecke a z. B. gefunden, dass dieselbe 65432 m lang ist, so drückt man diese Länge besser durch eine der genannten höheren Decimaleinheiten, gewöhnlich durch Kilometer aus, indem man sagt: die Strecke a ist 65 Kilometer 432 Meter lang und bezeichnet dies durch:

$a = 65$ km 432 m

Erkl. 106. Beim Messen bedeutend grösserer Strecken, als das Meter, bedient man sich ausser den Vielfachen eines Meters (siehe Erkl. 105) auch der „deutschen“ oder „geographischen“ Meile, sowie der Seemeile.

Die deutsche oder geographische Meile ist gleich dem 15. Teil eines Grades des Erd-Aequators, welcher nach den neuesten Messungen 7,420 km oder 7420 m misst.

Gewöhnlich gibt man die Länge einer geographischen Meile in runder Zahl mit 7,5 km oder 7500 m an.

Die Seemeile ist gleich 1,855 km.

Erkl. 107. Mit den Worten: Decimeter, Centimeter und Millimeter bezeichnet man Decimaltheile eines Meters. Dieselben sind aus den dem Lateinischen entstammenden Vorsilben deci, centi und milli, welche bew. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$

und $\frac{1}{1000}$ bedeuten, und dem Worte „Meter“ zusammengesetzt.

Mit den Worten „Dekameter“, „Hektometer“, „Kilometer“, „Myriameter“ bezeichnet man Vielfache eines Meters.

Dieselben sind aus den dem Griechischen entstammenden Vorsilben: Deko- Hekto, Kilo und Myria, welche bezw. 10, 100, 1000, 10000 bedeuten, und dem Worte „Meter“ zusammengesetzt.

Erkl. 108. Durch ein Reichsgesetz wurde u. a. bestimmt, dass die Bezeichnungen der Längenmasseinheit (des Meters), ihrer Decimaltheile und ihrer Vielfachen in abgekürzter Form, wie folgt, zu geschehen haben:

Das Meter	soll bezeichnet werden durch:	m
„ Decimeter	„ „ „ „	dm
„ Centimeter	„ „ „ „	cm
„ Millimeter	„ „ „ „	mm
„ Dekameter	„ „ „ „	Dm
„ Hektometer	„ „ „ „	Hm
„ Kilometer	„ „ „ „	Km
„ Myriameter	„ „ „ „	Mm

Es sei hier noch bemerkt, dass man nach den vorstehend aufgeführten Abkürzungen keinen Punkt setzt.

Erkl. 109. Nachstehendes Schema enthält eine Zusammenstellung des metrischen Längenmasssystems:

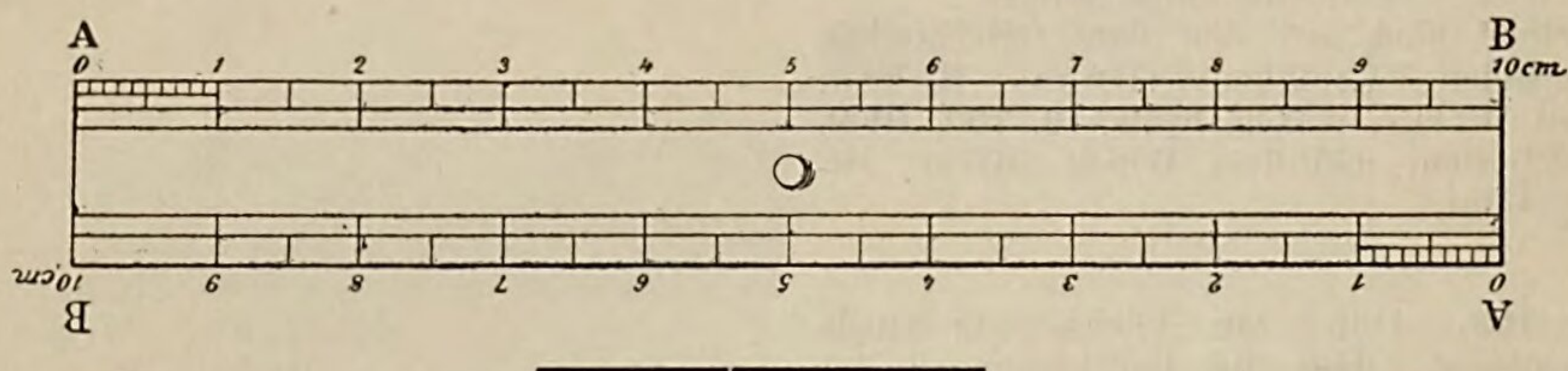
1 Mm =	10 Km =	100 Hm =	1000 Dm =	10000 m =	100000 dm =	1000000 cm =	10000000 mm
0,1 Mm =	1 Km =	10 Hm =	100 Dm =	1000 m =	10000 dm =	100000 cm =	1000000 mm
0,01 Mm =	0,1 Km =	1 Hm =	10 Dm =	100 m =	1000 dm =	10000 cm =	100000 mm
0,001 Mm =	0,01 Km =	0,1 Hm =	1 Dm =	10 m =	100 dm =	1000 cm =	10000 mm
0,0001 Mm =	0,001 Km =	0,01 Hm =	0,1 Dm =	1 m =	10 dm =	100 cm =	1000 mm
0,00001 Mm =	0,0001 Km =	0,001 Hm =	0,01 Dm =	0,1 m =	1 dm =	10 cm =	100 mm
0,000001 Mm =	0,00001 Km =	0,0001 Hm =	0,001 Dm =	0,01 m =	0,1 dm =	1 cm =	10 mm
0,0000001 Mm =	0,000001 Km =	0,00001 Hm =	0,0001 Dm =	0,001 m =	0,01 dm =	0,1 cm =	1 mm

Erkl. 110. Der durch die Figur 35 dargestellte Massstab stellt einen Massstab dar, auf welchem die Strecke AB eine Länge von 1 dm hat; diese Strecke AB ist noch in aliquote Teile geteilt, welche Centimeter, bezw. Millimeter darstellen; die Einrichtung dieses Massstabes ergibt sich aus der Figur 35. (Man beachte die Erkl. 107 und 108).

Der durch die Figur 35 dargestellte Massstab ist ein Decimetermassstab und als solcher ein natürlicher Massstab, da die auf demselben markierte Strecke, welche einen Decimeter vorstellen soll, in Wirklichkeit auch die Länge einer solchen Strecke hat, welche Decimeter genannt wird.

Einen solchen Massstab kann man als einen sog. verjüngten Massstab betrachten; wenn man sich die Strecke AB , welche auf demselben als Decimeter bezeichnet ist, z. B. verzehnfacht denkt, in welchem Fall die Strecke AB infolge dieser gedachten Vervielfältigung einen Meter, und das, was vorher einen Centimeter, bzw. einen Millimeter vorstellte, nunmehr einen Decimeter, bzw. einen Centimeter vorstellt. Ueber die verjüngten Massstäbe findet man Ausführliches in dem Teil, welcher über die Ähnlichkeit handelt.

Figur 35.



D) Ueber die Ebene.

Frage 39. Was ist eine ebene Fläche?

Erkl. 111. Mit der Vorstellung einer geraden Linie nach den in den Antworten auf die Fragen 1 bis 3 gegebenen Definitionen gelangt man zu der Vorstellung, dass man sich an jede gerade Linie eine zweite gerade Linie so gelagert denken kann, dass jeder gedachte Punkt der einen Geraden mit einem entsprechenden Punkt der andern Geraden ein Linienelement bildet (siehe Erkl. 18 und Lehrsatz 1).

Erkl. 112. Die Vorstellung einer Aneinanderreihung oder einer An- oder Nebeneinanderlagerung oder einer ununterbrochenen, kontinuierlichen oder stetigen Aufeinanderfolge von vier gedachten geraden Linien, welche die in nebenstehender Antwort angegebene Lage zu einander haben, ist abhängig von der Vorstellung, die man sich von einer einzelnen geraden Linie (rücksichtlich dessen, dass sie nur eine wahrnehmbare oder vorstellbare Ausdehnung hat) selbst macht, siehe Erkl. 49.

Einerlei, welche Vorstellung sich der Einzelne von einer geraden Linie (bzw. von einem einzelnen Punkt derselben macht), muss jene Vorstellung über die Art und Weise, wie die vier gedachten geraden Linien L_1 , L_2 , L_3

Antwort. Eine ebene Fläche ist eine solche Aneinanderlagerung, oder eine solche Aneinanderreihung, oder eine solche ununterbrochene, kontinuierliche oder stetige Aufeinanderfolge von geraden Linien (ohne Anfang und Ende), welche

a) die Eigenschaft oder das Merkmal hat, dass von je vier aufeinanderfolgenden jener gedachten geraden Linien, welche z. B. durch L_1 , L_2 , L_3 und L_4 bezeichnet seien, zwei derselben, z. B. L_2 und L_3 , eine solche Lage zu einander haben, dass zu jedem gedachten einzelnen Punkt der einen dieser Geraden ein Punkt in der andern Geraden gedacht werden kann, der mit jenem ein Linienelement bildet, siehe Erkl. 111, dass ferner diese beiden Geraden L_2 und L_3 zwischen den beiden andern Geraden L_1 und L_4 liegen, und dass die Gera-

und L_4 aneinandergelagert sind, damit zwei derselben L_2 und L_3 die in Antwort auf Frage 39 erwähnte Aufeinanderfolge bilden, welche zwischen den beiden andern geraden Linien L_1 und L_4 liegt, damit letztere in Bezug auf jene zwischen ihnen liegende Aufeinanderfolge entgegengesetzte Lagen haben, eine solche sein, dass durch sie jene gedachte Aneinanderlagerung der vier Geraden ein für allemal vollkommen bestimmt ist, oder dass sie eindeutig ist, oder dass keine andere Art und Weise jener Aneinanderlagerung mehr denkbar ist, welche ebenfalls die gegebenen Bedingungen erfüllen könnte (siehe Erkl. 3).

Da jede Gerade als eine Aneinanderreihung von Punkten betrachtet wird, so kann man rücksichtlich der Erkl. 3 die entgegengesetzten Lagen jener Geraden L_1 und L_4 in Bezug auf die von den Geraden L_2 und L_3 gebildete Aufeinanderfolge bestimmen, indem man sagt:

Die Geraden L_1 und L_4 haben in Bezug auf die von den Geraden L_2 und L_3 gebildete Aufeinanderfolge entgegengesetzte Lagen, oder ihre Lagen sind in Bezug auf diese Aufeinanderfolge nach der Erkl. 3 vollkommen oder eindeutig bestimmt, wenn irgend ein gedachter einzelner Punkt der Geraden L_1 und ein gedachter einzelner Punkt der Geraden L_4 in Bezug auf eines der Linienelemente, welche nach Antwort auf die Frage 39 von zwei Punkten der jene Aufeinanderfolge bildenden Geraden L_2 und L_3 gebildet gedacht werden können, entgegengesetzte Lagen haben, oder was dasselbe sagt, wenn jene gedachten Punkte Punkte der Geraden sind, welche durch eines der soeben erwähnten Linienelemente bestimmt sind (s. Erkl. 3).

Erkl. 113. Ausser der in nebenstehender Antwort definierten sogen. ebenen Fläche, welche auch kurzweg „Ebene“ genannt wird, gibt es noch andere ununterbrochene Aufeinanderfolgen oder Aneinanderreihungen von Linien (siehe Erkl. 1), welche ganz allgemein „Flächen“ heissen, welche je nach ihren besondern Eigenschaften durch andere Beinamen gekennzeichnet werden; so gibt es z. B. verschiedene Arten, sog. krummer und windschiefer Flächen. Die Definitionen solcher Flächen sind an geeigneten Stellen gegeben.

Erkl. 114. Flächen kann man auch mit dem Namen zweidimensionale Raumgrössen bezeichnen (siehe Erkl. 5). Je nach der besondern Gattung der Flächen kann man zweidimensionale Raumgrössen der ersten, zweiten Ordnung unterscheiden. Die ebenen Flächen oder Ebenen heissen dann zweidimensionale Raumgrössen und zwar zweidimensionale Raumgrössen der ersten Ordnung.

Die Bedeutung des Wortes zweidimensional und zwar der ersten oder zweiten Ordnung ist an geeigneten Stellen erklärt (siehe Erkl. 130).

den L_1 und L_4 in Bezug auf jene beiden Geraden L_2 und L_3 entgegengesetzte Lagen zu einander haben (siehe Erkl. 112), und welche

b) die Eigenschaft oder das Merkmal hat, dass sie ohne Anfang und ohne Ende ist (siehe die Erkl. 113 bis 116).

Erkl. 115. Eine solche ununterbrochene Aufeinanderfolge von geraden Linien, welche eine Ebene darstellt, erfüllt einen Raum und einen solchen Raum kann man eine Raumebene oder rücksichtlich der Erkl. 114 einen zweidimensionalen Raum (der ersten Ordnung) nennen.

Erkl. 116. Die Eigenschaft einer ebenen Fläche oder einer Ebene, dass sie eine ununterbrochene Aufeinanderfolge (Aneinanderreihung oder Aneinanderlagerung) von geraden Linien ist, von welchen je vier aufeinanderfolgend gedachte die in Antwort auf Frage 39 angegebene Lage zu einander haben, ist die wesentliche oder die Grundeigenschaft einer Ebene, d. i. diejenige Eigenschaft, ohne welche man sich eine Ebene überhaupt nicht denken kann.

Die Eigenschaft, dass sie ohne Anfang und ohne Ende ist, also unbegrenzt gedacht wird, ist nur eine besondere Eigenschaft; es gibt speziellere Arten ebener Flächen, nämlich solche, welche ganz, teilweise und auf besondere Weise begrenzt sind, wie in den späteren Abschnitten gezeigt wird.

Frage 40. Auf welche Weise kann man sich eine Vorstellung oder ein Bild von einer Ebene machen?

Erkl. 117. Einen Bogen Papier kann man leicht so auflegen, dass er dem in nebenstehender Antwort Gesagten genügt. In diesem Falle sagt man, das Papier liegt „eben“ auf, seine obere Begrenzung (Oberfläche im engern Sinn) ist eine ebene Fläche.

Antwort. Man kann sich eine ungefähre Vorstellung oder ein Bild von einer ebenen Fläche, einer Ebene machen, indem man einen solchen Körper aufsucht oder herstellt, der an irgend einer Stelle seiner Grenzen (siehe Erkl. 57), die Eigenschaft hat, dass man an dieser Stelle eine solche ununterbrochene Aufeinanderfolge von geraden Linien gezogen denken kann, welche die in Antwort auf Frage 39 angegebene Eigenschaft haben; eine solche Stelle ist ein Teil einer ebenen Fläche (s. die Erkl. 117).

Frage 41. Wie kann man sich eine ebene Fläche oder eine Ebene entstanden denken?

Erkl. 118. Rücksichtlich der Bezeichnung zweier Linien durch $+L_1$ und $-L_1$ in nebenstehender Antwort, beachte man das, was über die Bezeichnung zweier Punkte durch $+p_1$ und $-p_1$ in den Erkl. 13 und 14 gesagt wurde.

Antwort. Eine ebene Fläche oder eine Ebene kann man sich folgendermassen entstanden denken:

Man denke sich zwei (unbegrenzte) gerade Linien, bezeichnet durch: $+L_1$ und $-L_1$, (s. Erkl. 118), so an- oder nebeneinandergelagert, dass jeder Punkt der einen geraden Linie mit einem Punkt der andern Ge-

Erkl. 119. Die Menge der geraden Linien, welche zur Bildung einer von dem Auge wahrnehmbaren ebenen Fläche (bezw. eines Teils derselben) erforderlich ist, ist durch keine Zahl angebbar (siehe die Erkl. 15).

Erkl. 120. Durch eine ununterbrochene Aufeinanderfolge zweier Geraden ist nach der in nebenstehender Antwort angegebenen Entstehungsweise einer ebenen Fläche oder einer Ebene eine solche vollkommen bestimmt; eine solche Aufeinanderfolge zweier Geraden, welche die Eigenschaft hat, dass jeder einzelne Punkt der einen Geraden mit einem Punkt der andern Geraden nach der Erkl. 18 ein Linienelement bildet, heisst als kleinster Teil, durch welchen die Ebene selbst bestimmt ist, ein (ebenes) Flächenelement.

Erkl. 121. Nach der in Antwort auf Frage 41 gegebenen Definition der Entstehung einer ebenen Fläche oder einer Ebene (im weitesten Sinne) hat man zweierlei gerade Linien bei der Entstehung einer Ebene, bezw. in der entstehenden Ebene selbst zu unterscheiden, nämlich:

a) solche gerade Linien, durch deren fort- und fortgesetzte An- oder Nebeneinanderlagerung eine Ebene entstehend gedacht wird und welche deshalb die die Ebene erzeugenden geraden Linien (Erzeugungslinien) oder kurzweg die „Erzeugenden“ (Generatricen, von dem lat. Wort Generatrix) genannt werden können, und

b) solche gerade Linien, deren Richtungen durch je zwei einem gegebenen Flächenelement angehörenden und ein Linienelement bildenden Punkte (siehe Erkl. 120) im voraus bestimmt sind und deren Richtungen die Richtungen der Wege angeben, in welchen sich bei der Entstehung der Ebene die einzelnen Punkte der unter a) erwähnten Erzeugenden bewegen müssen, und welche aus diesem Grunde die die Erzeugenden leitenden geraden Linien (Leitlinien) oder kurzweg die „Leitenden“ (Directricen, von dem Worte Directrix) genannt werden können.

raden ein Linienelement (siehe Erkl. 18 und Lehrsatz 1), bildet; diese beiden Geraden denke man sich durch irgend eine Ursache auseinandergeschoben und deren innegehabten Orte, Stellen im Raum, welche nach der Erkl. 5 eindimensionale Räume sind, durch zwei andere (unbegrenzte) Geraden $+L_2$ und $-L_2$ in derselben Weise ausgefüllt, und zwar denke man sich diesen Vorgang so, dass nach demselben das neue Linienpaar zwischen jenen beiden ersten Geraden liegt, und dass je zwei solche Punkte der Geraden $+L_1$ und $-L_1$, welche vorher ein Linienelement bildeten, in Bezug auf eines der von dem neuen Linienpaar $+L_2$ und $-L_2$ gebildeten neuen Linienelement entgegengesetzte Lagen haben, oder dass nach jenem gedachten Vorgang je zwei solche Punkte der Geraden $+L_1$ und $-L_1$, welche vorher ein Linienelement bildeten mit den beiden Punkten der Geraden $+L_2$ und $-L_2$, welche nachher in derselben Weise ein Linienelement bilden, in einer Geraden liegen.

Denkt man sich diesen so angedeuteten Vorgang, in ganz analoger Weise wie den in Antwort auf Frage 3 vorgeführten Vorgang, ohne Unterbrechung fort- und fortgesetzt wiederholt, so entsteht eine ununterbrochene An- oder Nebeneinanderlagerung von geraden Linien, welche die in Antwort auf Frage 39 erwähnte Eigenschaft hat und die eine ebene Fläche oder eine Ebene genannt wurde (siehe die Erkl. 119 bis 121).

Frage 42. Zu welchen Vorstellungen gelangt man mittels der in voriger Antwort gegebenen Definition der Entstehung einer Ebene?

Antwort. Mittels der in Antwort auf Frage 41 gegebenen Definition der Entstehung einer ebenen Fläche oder einer Ebene gelangt man zu folgenden Vorstellungen:

1) Man gelangt zu der Vorstellung einer Trennung der das ursprüngliche ebene Flächenelement bilden-

den erzeugenden Geraden $+L_1$ und $-L_1$ durch die das zweite Flächenelement bildenden Erzeugenden $+L_2$ und $-L_2$; u. s. f. (siehe Erkl. 121).

2) Man gelangt zu der Vorstellung einer steten »Ortsveränderung« einer sog. Bewegung der das ursprüngliche Flächenelement bildenden erzeugenden Geraden $+L_1$ und $-L_1$, ebenso der das folgende Flächenelement bildenden Erzeugenden $+L_2$ und $-L_2$ u. s. w. (siehe Erkl. 122).

3) Man gelangt zu der Vorstellung, dass die stete Ortsveränderung der erzeugenden Geraden $+L_1$ und $-L_1$ (ebenso der folgenden Erzeugenden $+L_2$ und $-L_2$) in einer steten Ortsveränderung der sie bildenden einzelnen Punkte besteht.

4) Man gelangt zu der Vorstellung, dass die Ortsveränderungen dersämtlichen Punkte, welche die Erzeugende $+L_1$ bilden, nicht in demselben Sinn stattfindet, wie die Ortsveränderungen der Punkte, welche die Erzeugende $-L_1$ bilden, sondern dass sie gerade im entgegengesetzten Sinn stattfinden.

5) Man gelangt zu der Vorstellung, dass die Wege (Raumstrahlen), welche die Punkte der Erzeugenden $+L_1$ und $-L_1$ bei der Entstehung der Ebene zurücklegen, ausgefüllt werden von Punkten, welche die Leitenden bilden.

6) Man gelangt zu der Vorstellung, dass eine ebene Fläche oder eine Ebene eine An- oder Nebeneinanderlagerung von solchen geraden Linien (den sog. Erzeugenden) ist, welche die Eigenschaft haben, dass jeder gedachte einzelne Punkt einer dieser Geraden zugleich ein Punkt einer andern geraden Linie (einer sog. Leitenden) ist, die gebildet wird aus Punkten, von welchen jeder einzelne einer andern jener nebeneinandergelagerten Linien (der Erzeugenden) angehört (siehe die Erkl. 121).

7) Man gelangt zu der Vorstellung, dass jeder gedachte einzelne Punkt

Erkl. 122. Die Aufeinanderfolge der Orte, welche jede der das ursprüngliche Flächenelement bildenden Erzeugenden $+L_1$ und $-L_1$ nacheinander einnehmen, nennt man den Weg oder die Bahn der erzeugenden Geraden $+L_1$ bzw. der Geraden $-L_1$.

Der Weg, welchen jede der erzeugenden Geraden $+L_1$ und $-L_1$ bei der in Antwort auf Frage 41 erwähnten Entstehung einer Ebene zurücklegt, ist ein Teil des durch diese Ebene ausgefüllten Raumes und heisst, als ein Teil einer Raumebene (s. Erkl. 115) ebenfalls eine Raumebene.

Erkl. 123. Stehen zwei gerade Linien in der Beziehung, dass sie, wie eine Leitende und eine Erzeugende einer Ebene, einen einzigen und nur einen einzigen Punkt gemein haben, so sagt man: „sie schneiden sich gegenseitig.“

Erkl. 124. Nach der Erkl. 123 kann man auch sagen: zwei gerade Linien stehen in der Beziehung, dass sie sich schneiden, wenn sie einen und nur einen Punkt gemein haben.

Erkl. 125. Von den Erzeugenden einer Ebene kann man nur aussagen, dass sie „nebeneinander liegen“ und zwar in einer ganz bestimmten Art und Weise, welche in der in Antwort auf Frage 41 gegebenen Definition der Entstehung einer Ebene ausgesprochen ist, und die man gemeinhin mit dem griechischen Worte „parallel“ (d. h. nebeneinanderliegend) bezeichnet.

Erkl. 126. Nach der Erkl. 125 kann man auch sagen:

„Zwei oder mehrere Gerade, welche man als Erzeugende einer Ebene betrachten kann, sind parallel.“

Erkl. 127. Aus dem in nebenstehender Antwort unter 9) Gesagten und aus den Erkl. 125 und 126 ergibt sich, dass zwei (oder mehrere) parallele Gerade die Eigenschaft besitzen, keinen einzigen Punkt gemein zu haben.

Erkl. 128. Von parallelen Geraden sagt man: sie sind gleichgerichtet. Hiernach versteht man auch unter gleichgerichteten Geraden oder Strahlen parallele Gerade oder Strahlen.

Erkl. 129. Aus dem in nebenstehender Antwort Gesagten ergibt sich, dass man bei einer gedachten Entstehung einer Ebene die gedachten Erzeugenden mit den gedachten Leitenden vertauschen, letztere als Erzeugende, jene als Leitende betrachten kann.

Erkl. 130. Die ebene Fläche kann man nach der Erkl. 49 und dem in der Antwort auf die Frage 39 Gesagten als eine Raumgrösse betrachten, bei welcher man zwei Ausdehnungsrichtungen unterscheiden kann, und die deshalb zu den zweidimensionalen Raumgrössen gehört (siehe die Erkl. 5 und 114).

Erkl. 131. Rücksichtlich der in der Einleitung gegebenen Definition eines Punktes, der in der Antwort auf die Frage 39 gegebenen Definition einer Ebene, gelangt man zu der Vorstellung, dass man in einer gedachten Ebene unzählig viele Gerade (gezogen) denken kann.

einer Ebene einer Erzeugenden angehört und nur einer der Erzeugenden angehören kann, welche die Ebene bilden, bzw. durch deren Aneinanderreihung die betreff. Ebene erzeugt gedacht wurde.

8) Man gelangt zu der Vorstellung, dass (siehe die Erkl. 121) die Leitenden einer Ebene mit den Erzeugenden derselben Ebene, je nur einen einzigen und nur einen einzigen Punkt gemein haben; in dieser gegenseitigen Beziehung nennt man die Leitenden und die Erzeugenden einer Ebene: »sich schneidende« gerade Linien (siehe Erkl. 123 und 124).

9) Man gelangt zu der Vorstellung, dass die Erzeugenden einer Ebene keinen einzigen Punkt miteinander gemein haben, dass sie also auch in keiner andern Beziehung zu einander stehen, als in der einer Nebeneinanderlagerung von ganz bestimmter Art und Weise (siehe Erkl. 125 bis 128).

10) Man gelangt zu der Vorstellung, dass auch die Leitenden einer Ebene keinen einzigen Punkt miteinander gemein haben, dass sie also auch in keiner andern Beziehung zu einander stehen, als in der, dass sie wie die Linienelemente, durch welche sie bestimmt sind, siehe Erkl. 121, nebeneinandergelagert gedacht werden müssen, dass sie wie die Erzeugenden Nebeneinanderlagerungen von ganz bestimmter Art und Weise sind, dass sie nach den Erkl. 127 und 128 parallel oder gleichgerichtet sind (siehe Erkl. 129).

11) Rücksichtlich der in der Einleitung gegebenen Definition eines Punktes gelangt man zu der Vorstellung, dass eine ebene Fläche eine ununterbrochene Nebeneinanderlagerung von Punkten ist, die, einzeln gedacht, Aufeinanderfolgen von Punkten bilden, aus welchen man sich die mannigfaltigsten, der betreffenden Ebene angehörenden oder in der betreffenden Ebene liegenden Raumgrössen gebildet denken kann.

Frage 43. Was kann man von einer ebenen Fläche oder einer Ebene hinsichtlich deren Entstehungsweise aussagen?

Erkl. 132. Unter einer Aufeinanderfolge zweier Geraden oder unter einem ebenen Flächenelement hat man stets zwei solche gerade Linien zu verstehen, welche die Eigenschaft haben, dass jeder gedachte Punkt der einen Geraden mit einem Punkt der andern Geraden ein Linienelement bildet (s. Erkl. 120).

Erkl. 133. Die Richtigkeit der durch den Lehrsatz 15 gemachten Aussage ergibt sich aus der in Antwort auf Frage 41 gegebenen Definition der Entstehungsweise einer ebenen Fläche.

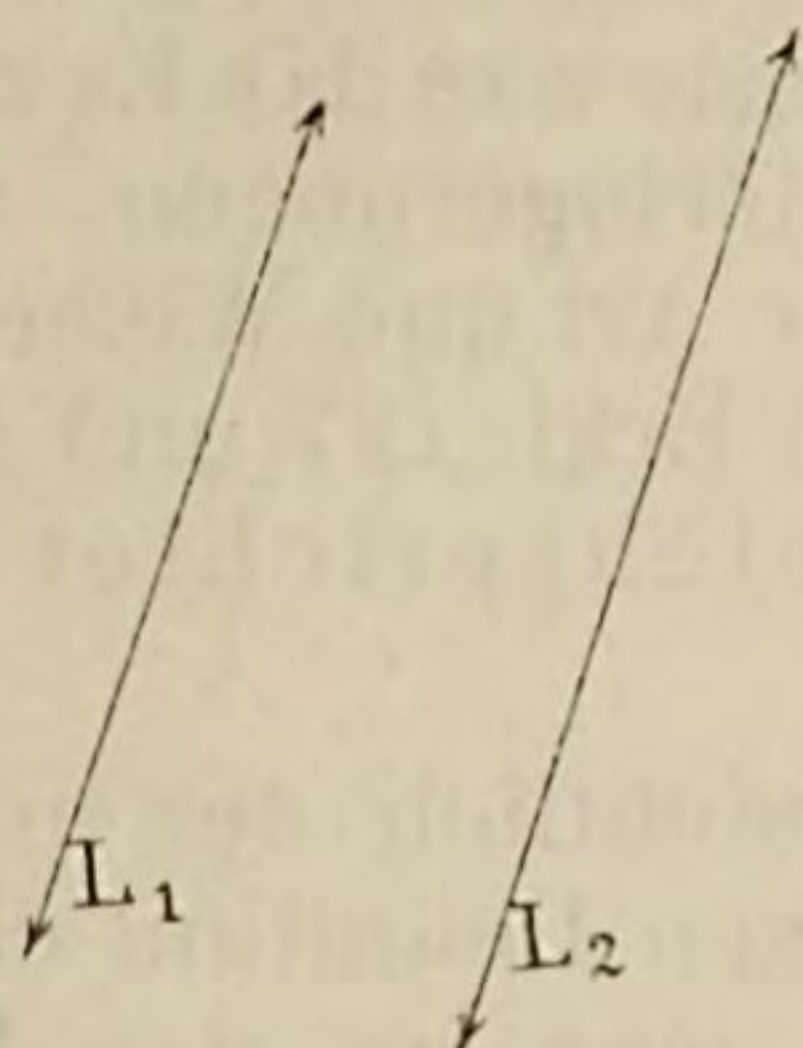
Der Lehrsatz ist eine Folgerung des in jener Antwort Gesagten.

Frage 44. Was kann man von irgend zwei Erzeugenden, was von einer Geraden und einem Punkt, was von zwei Geraden aussagen, die bezw. einer Ebene angehören?

Erkl. 134. Die Richtigkeit der durch den Lehrsatz 16 ausgesprochenen Behauptung kann man wie folgt darthun.

Voraussetzung. Es seien, s. Fig. 36, L_1 und L_2 zwei Erzeugende einer Ebene oder zwei parallele (gleichgerichtete) Gerade, welche der Papierebene angehören.

Figur 36.



Behauptung. Die Geraden L_1 und L_2 können beide zugleich keiner zweiten, keiner andern Ebene als der Papierebene angehören.

Beweis. Man kann die Geraden L_1 und L_2 , welche nach der Voraussetzung Erzeugende der gedachten Ebene, der Papierebene sind, als zwei solche Erzeugende betrachten, welche bei der Entstehung der gedachten Ebene, der Papierebene, ursprünglich eine Aufeinanderfolge

Antwort. Rücksichtlich der in voriger Antwort gegebenen Definition der Entstehungsweise einer Ebene kann man die Aussage machen:

Lehrsatz 15. »Eine ebene Fläche oder eine Ebene ist (rücksichtlich der in Antwort auf Frage 41 gegebenen Definition) durch die einmal angenommene Lage zweier geraden Linien, welche eine Aufeinanderfolge (ein Flächenelement) bilden, im voraus vollkommen oder eindeutig bestimmt« (siehe Erkl. 132 und 133).

Antwort. Von zwei Erzeugenden einer Ebene oder von zwei gleichgerichteten (parallelen) Geraden, welche einer Ebene angehören, kann man folgendes aussagen:

Lehrsatz 16. »Zwei Erzeugende einer Ebene oder zwei gleichgerichtete oder parallele Gerade, welche einer Ebene angehören, können beide zugleich nicht einer zweiten, einer andern Ebene angehören« (siehe Erkl. 134).

Von einer Erzeugenden einer Ebene, oder einer einer Ebene angehörenden Geraden und einem Punkt, welcher nicht dieser Geraden, wohl aber derselben Ebene angehört, kann man die analoge Aussage machen:

Lehrsatz 17. »Eine Erzeugende einer Ebene oder eine Gerade, welche einer Ebene angehört, und ein Punkt, welcher nicht dieser Geraden, wohl aber derselben Ebene angehört, können beide nicht zugleich auch einer zweiten Ebene angehören« (siehe Erkl. 135).

Von zwei beliebigen Geraden, welche einer Ebene angehören, kann man die analoge Aussage machen:

(siehe Erkl. 132) bildeten, bezw. welche nach der in Antwort auf Frage 41 gegebenen Definition der Entstehung einer Ebene das erste Flächenelement bildeten:

Würden dieselben Geraden L_1 und L_2 beide einer zweiten Ebene angehören, so könnte man sie in derselben Weise als zwei solche Erzeugende betrachten, welche das ursprüngliche, das erste Flächenelement dieser gedachten zweiten Ebene bildeten. Denkt man sich nun aus jenen Geraden L_1 und L_2 in beiden Fällen jenes gedachte ursprüngliche, erste Flächenelement wieder hergestellt, also in beiden Fällen auf dieselbe Weise eine der Geraden an die andere so gelagert, dass jeder Punkt der einen mit einem Punkt der andern ein Linienelement bildet (siehe Erkl. 18), so muss man in beiden Fällen, aus denselben Geraden L_1 und L_2 , dasselbe Flächenelement erhalten.

Da aber nach dem Lehrsatz 15 durch ein Flächenelement eine Ebene eindeutig oder vollkommen bestimmt ist, so können jene der Papierebene angehörnden Geraden L_1 und L_2 , wie vorstehend angenommen wurde, beide zugleich nicht auch noch einer zweiten Ebene angehören.

Erkl. 135. Die Richtigkeit der durch den Lehrsatz 17 ausgesprochenen Behauptung kann man, wie folgt darthun:

Voraussetzung. Es seien, siehe Figur 37, L_1 eine Linie und p ein Punkt, welche beide einer Ebene, der Papierebene angehören.

Behauptung. Die Linie L_1 und der Punkt p können beide zugleich keiner zweiten, keiner andern Ebene als der Papierebene angehören.

Beweis. Man betrachte die Linie L_1 als eine Erzeugende der Papierebene, der Ebene, welcher L_1 und p angehören sollen; man beachte ferner, dass nach dem in Antwort auf Frage 42 unter 7) Gesagten es eine und nur eine Erzeugende der gedachten Ebene gibt, welcher der Punkt p angehört. Diese Erzeugende sei in der Figur 37 durch die punktierte Linie L_2 dargestellt; sie muss als Erzeugende der gedachten Ebene nach der Erkl. 126 mit der Erzeugenden L_1 gleichgerichtet oder parallel sein.

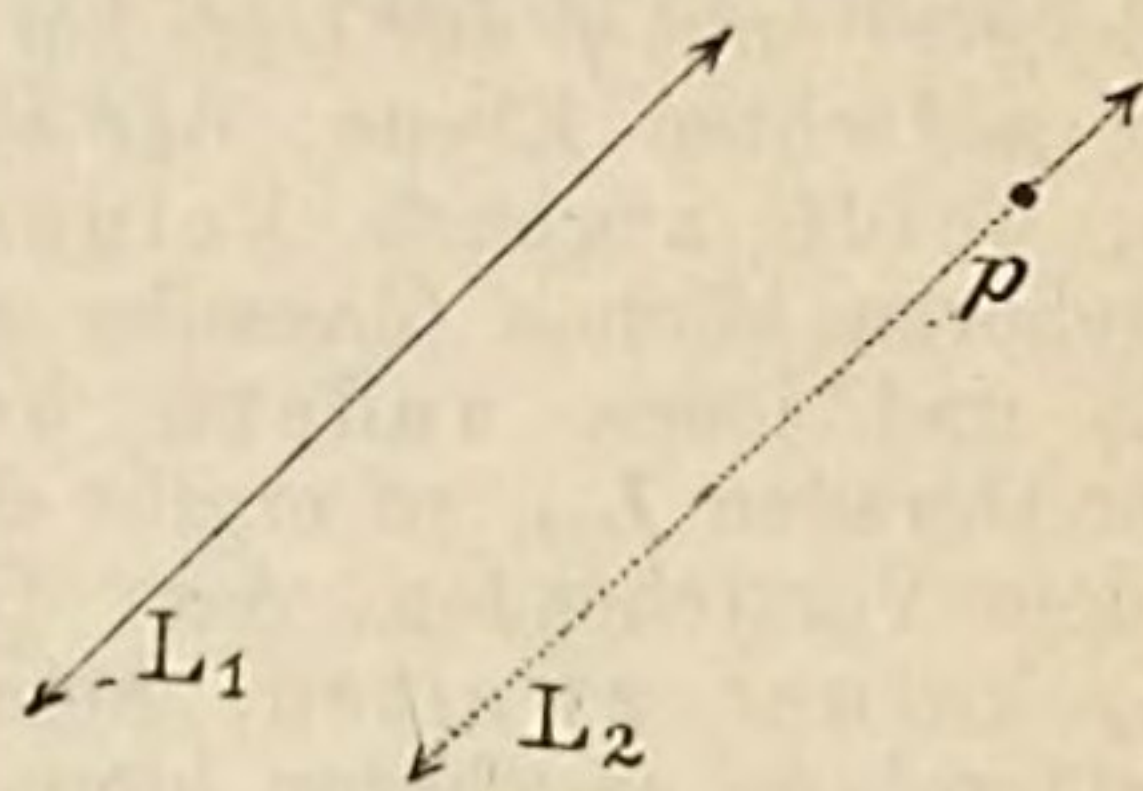
Da nun nach dem Lehrsatz 16, wie in der Erkl. 134 bewiesen wurde, die beiden Geraden L_1 und L_2 als Erzeugende der gedachten Ebene keiner zweiten Ebene angehören können, so können hiernach und nach dem vorstehend Gesagten auch die Gerade L und der Punkt p beide zugleich keiner zweiten Ebene, keiner andern als der Papierebene angehören.

Erkl. 136. Die Richtigkeit der durch den Lehrsatz 18 ausgesprochenen Behauptung kann man wie folgt darthun:

Voraussetzung. Es seien, siehe Figur 38, L_1 und L_2 jene beliebigen Geraden, welche einer Ebene, der Papierebene angehören.

Lehrsatz 18. »Zwei beliebige Gerade, welche einer Ebene angehören, können beide nicht zugleich auch einer zweiten Ebene angehören« (siehe Erkl. 136).

Figur 37.



Behauptung. Die Linien L_1 und L_2 können beide zugleich keiner zweiten, keiner andern als der Papierebene angehören.

Beweis. Man kann, da die gegebenen Geraden zwei beliebige, der Ebene angehörnden Geraden sein sollen, zwei Fälle unterscheiden, nämlich:

- 1) die beiden Geraden sind gleichgerichtet oder sind beide Erzeugende der gedachten Ebene, in welchem Falle der Lehrsatz keines Beweises mehr bedarf, da er mit dem in der Erkl. 134 bewiesenen Lehrsatz 16 übereinstimmen würde, und
- 2) die beiden Geraden sind nicht gleichgerichtet oder sie schneiden sich, wie man nach dem in Antwort auf Frage 42 unter 8) Gesagten zu sagen pflegt.

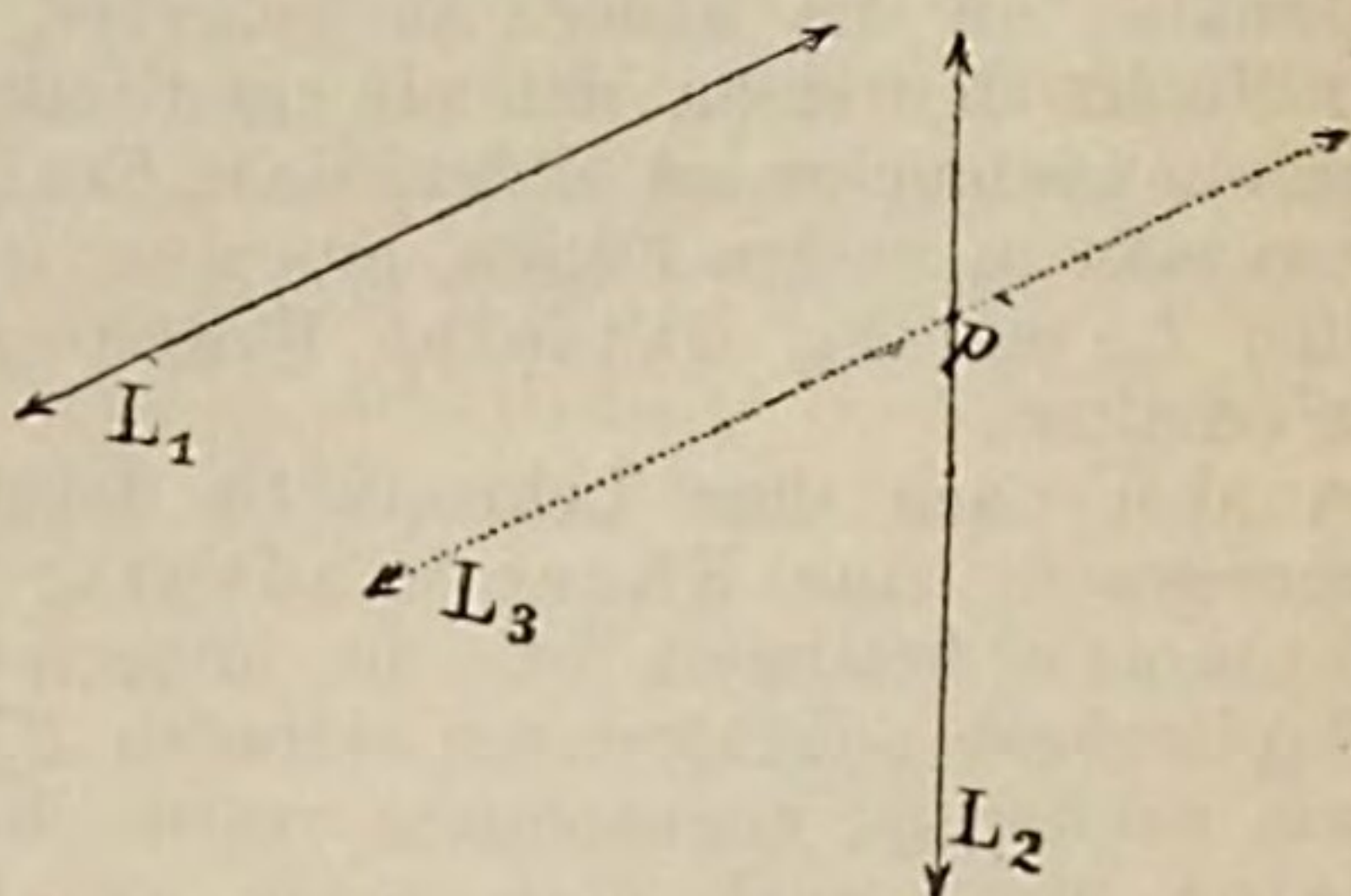
Den Beweis für den zweiten Fall kann man wie folgt führen:

Man betrachte eine der Geraden, z. B. die Gerade L_1 als eine Erzeugende der Papierebene, der Ebene, welcher L_1 und L_2 angehören sollen; man beachte ferner, dass es für jeden einzelnen Punkt der andern Geraden L_2 , z. B. für den beliebigen Punkt p dieser Geraden, nach dem in Antwort auf Frage 42 unter 7) Gesagten, eine und nur eine Erzeugende der gedachten Ebene gibt, welcher der betreffende Punkt, z. B. jener beliebige Punkt p angehört.

Für den beliebigen Punkt p der Geraden L_2 sei diese Erzeugende in der Figur 38 durch die gestrichelte Linie L_3 dargestellt; sie muss als Erzeugende der gedachten Ebene nach den Erkl. 125 und 126 mit der Erzeugenden L_1 gleichgerichtet oder parallel sein.

Da nun nach dem Lehrsatz 17, wie in der Erkl. 135 bewiesen wurde, die Gerade L_1 und der beliebige Punkt p der Geraden L_2 , welche beide der gedachten Ebene, der Papierebene angehören, beide zugleich keiner andern Ebene angehören können (dasselbe gilt für die Gerade L_1 und jeden andern beliebigen Punkt der Geraden L_2), so ergibt sich hieraus und aus dem Vorstehenden, dass die Geraden L_1 und L_2 keiner zweiten, keiner andern als der Papierebene angehören können.

Figur 38.



Frage 45. Welche Sätze ergeben sich aus dem in voriger Antwort Gesagten?

Erkl. 137. Der Lehrsatz 19 bedarf keines weiteren Beweises, da die darin enthaltenen Aussagen, wie in nebenstehender Antwort erwähnt, Folgerungen der Lehrsätze 16 bis 18 sind.

Antwort. Aus dem in voriger Antwort Gesagten ergeben sich als Folgerungen die Sätze:

Lehrsatz 19. »Es gibt nur eine einzige Ebene, welche:

- a) zwei bestimmte gleichgerichtete (parallele) Gerade enthält, welche
- b) eine bestimmte Gerade und einen bestimmten Punkt enthält, welche

Erkl. 138. Den nebenstehenden Lehrsatz 20 kann man auch wie folgt fassen:

„Man kann:

- a) durch zwei gleichgerichtete oder parallele Gerade, desgleichen
- b) durch eine Gerade und einen Punkt, desgleichen
- c) durch zwei Gerade, welche einen Punkt gemeinschaftlich haben oder welche sich schneiden, desgleichen
- d) durch drei Punkte, welche nicht einer Geraden angehören

je nur eine einzige Ebene gelegt denken.“

Erkl. 139. Die in dem Lehrsatz 20 enthaltenen Aussagen a) bis c) sind Folgerungen des Lehrsatzes 19, bzw. der Lehrsätze 16 bis 18. Die Aussage d) ist eine Folgerung der in dem Lehrsatz 20 unter b) enthaltenen Aussage und des Lehrsatzes 4.

Frage 46. Was kann man von zwei einer Ebene angehörenden Punkten aussagen?

Erkl. 140. Eine Linie gehört einer Ebene an, wenn jeder gedachte einzelne ihrer Punkte ein Punkt der Ebene ist.

Erkl. 141. Den Beweis zu Lehrsatz 21 kann man wie folgt führen:

Voraussetzung. In Figur 39 seien p_1 und p_2 zwei beliebige Punkte einer Ebene, z. B. der Papierebene.

Behauptung. Die durch die beiden Punkte p_1 und p_2 nach dem Lehrsatz 4 bestimmte Gerade L gehört ganz der Papierebene an (siehe Erkl. 140).

Beweis. Nach dem in Antwort auf Frage 42 unter 7) Gesagten gibt es eine und nur eine Erzeugende der gedachten Ebene (der Papierebene), welcher der Punkt p_1 angehört, diese Erzeugende sei z. B. die Gerade L_1 ; ebenso gibt es nur eine und nur eine Erzeugende der gedachten Ebene, welcher der Punkt p_2 angehört; diese Erzeugende muss mit jener, da sie Erzeugende derselben Ebene sind, parallel sein, es sei dies in Figur 39 die Gerade L_2 . Die Geraden L_1 und L_2 haben mit der Geraden L die Punkte p_1 und p_2 bzw. gemein und gehören nach Vorstehendem der Papierebene an. Nach dem Lehrsatz 19 gibt es nur eine einzige Ebene, in welcher L_1 und L liegen können; es gibt nur eine einzige Ebene, in welcher L_2 und L liegen können; es gibt nur eine einzige Ebene (die Papier-

- c) zwei Gerade enthält, die einen Punkt gemeinschaftlich haben, oder sich schneiden (siehe Erkl. 137).

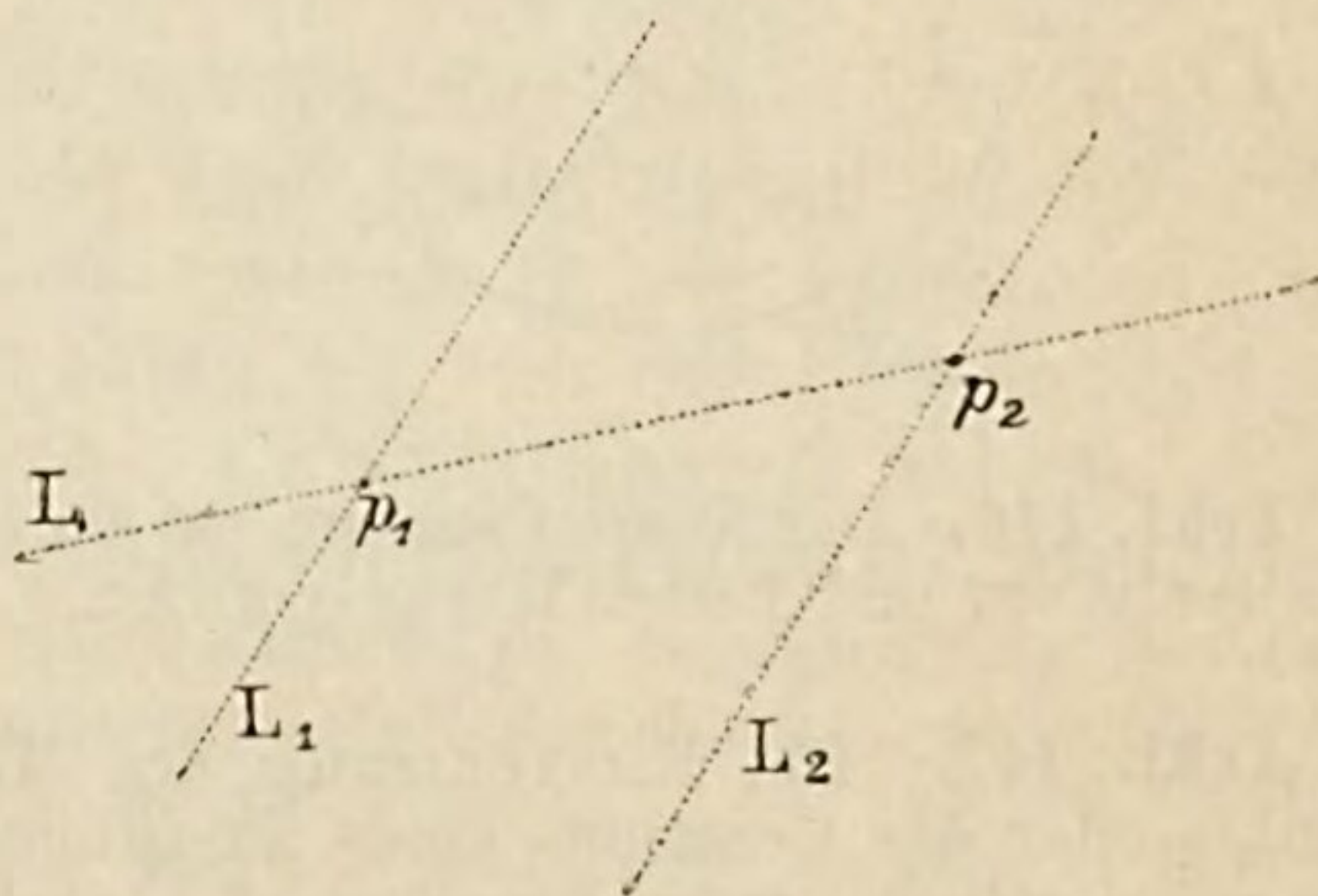
Lehrsatz 20. »Eine Ebene ist eindeutig oder vollkommen bestimmt:

- a) durch zwei gleichgerichtete oder parallele Gerade;
- b) durch eine Gerade und einen ihr nicht angehörenden Punkt;
- c) durch zwei Gerade, welche einen Punkt gemeinschaftlich haben, welche sich schneiden, und
- d) durch drei Punkte, welche nicht ein- und derselben Geraden angehören (siehe Erkl. 138 und 139).«

Antwort. Gehören zwei Punkte einer Ebene an, so kann man die Aussage machen:

Lehrsatz 21. »Zwei beliebige einer Ebene angehörenden Punkte bestimmen eine Gerade, welche der Ebene angehört« (siehe Erkl. 140 bis 145).

Figur 39.



ebene), in welcher L_1 und L_2 liegen können; dies ist nur dann möglich, wenn die drei Geraden L , L_1 und L_2 in jener einzigen Ebene (der Papierebene) liegen. Die Gerade L muss somit der Papierebene angehören.

Erkl. 142. Rücksichtlich des Lehrsatzes 21 kann man auch sagen: Zwei Punkte, welche in einer bestimmten Raumbene liegen, bestimmen eine Gerade, welche in jener Raumbene liegt (siehe Erkl. 115 und 143).

Erkl. 143. Eine Gerade liegt in einer Raumbene (siehe Erkl. 142), wenn ihre sämtlichen Punkte in der Raumbene liegen (siehe Erkl. 140).

Erkl. 144. Von den gedachten einzelnen Punkten einer Ebene sagt man: Sie liegen in der durch die Ebene bestimmten Raumbene oder sie gehören jener Ebene an.

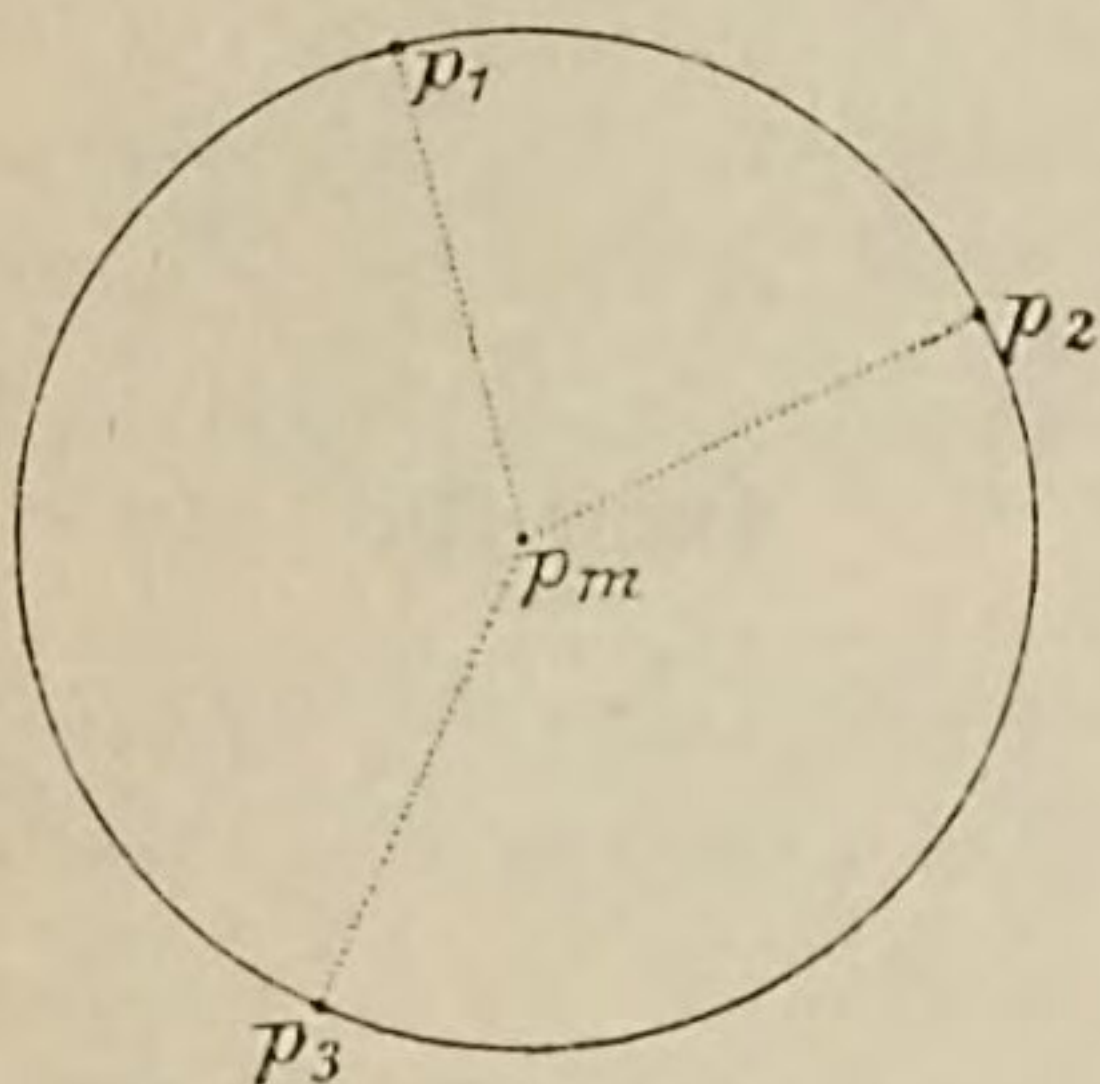
Erkl. 145. Der Lehrsatz 21 wird besonders angewandt, wenn auf praktische Weise untersucht werden soll, ob eine Fläche eine ebene Fläche ist, wie in einem späteren Abschnitt gezeigt wird.

Anmerkung 3. Weitere Sätze über die Ebene sind in späteren Abschnitten enthalten.

E) Ueber die Kreislinie, die gebrochene und die gemischte Linie.

Frage 47. Was ist eine Kreislinie?

Figur 40.



Erkl. 146. Das Wort Centrum ist ein lateinisches Wort und heisst Mittelpunkt.

Erkl. 147. Die Entfernung des Mittelpunkts oder des Centrums einer Kreislinie von einem beliebigen Punkt derselben, d. i. nach der Erkl. 76 die durch den Mittelpunkt und irgend einen Punkt der Kreislinie bestimmte Strecke, heisst Halbmesser oder Radius (siehe die Erkl. 148 und 154).

Antwort. Eine Kreislinie ist eine Aneinanderlagerung, eine Aneinanderreihung oder eine ununterbrochene, kontinuierliche oder stetige Aufeinanderfolge von solchen Punkten, welche:

- a) die Eigenschaften haben, dass sie in einer Ebene liegen, und welche
- b) von einem bestimmten in derselben Ebene liegenden Punkt, Mittelpunkt oder Centrum genannt, gleiche Entfernungen haben (siehe die Erkl. 146 bis 153).

Erkl. 148. Figur 40 stellt eine Kreislinie dar, siehe Antwort auf die Frage 48; in dieser Figur ist p_m der Kreismittelpunkt, der Mittelpunkt oder das Centrum; jede der Strecken wie $p_m p_1$, $p_m p_2$, $p_m p_3$ ist ein Halbmesser oder ein Radius des Kreises um p_m .

Erkl. 149. Rücksichtlich der in der Einleitung gegebenen Definition eines Punktes, der in den Antworten auf die Fragen 39 und 47 gegebenen Definitionen einer Ebene und einer Kreislinie gelangt man zu der Vorstellung, dass man sich in einer Ebene unzählig viele Kreislinien (gezogen) denken kann.

Erkl. 150. Eine Kreislinie wird auch oft kurzweg Kreis genannt (siehe Erkl. 151).

Erkl. 151. Ein Teil einer Ebene, welcher von einer Kreislinie begrenzt gedacht wird, nennt man eine Kreisfläche.

Die eine Kreisfläche begrenzende Kreislinie heisst Umfang oder Peripherie der Kreisfläche.

(Siehe den späteren Teil, welcher speziell über den Kreis handelt.)

Erkl. 152. Das Wort „Peripherie“ stammt aus dem Griechischen und heisst „Umfang“.

Erkl. 153. Das Wort „Radius“ ist das lateinische Wort „radius“, d. h. „Strahl“. Der Radius eines Kreises wird gewöhnlich mit dem Buchstaben „r“ bezeichnet.

Frage 48. Wie kann man eine Kreislinie bildlich darstellen.

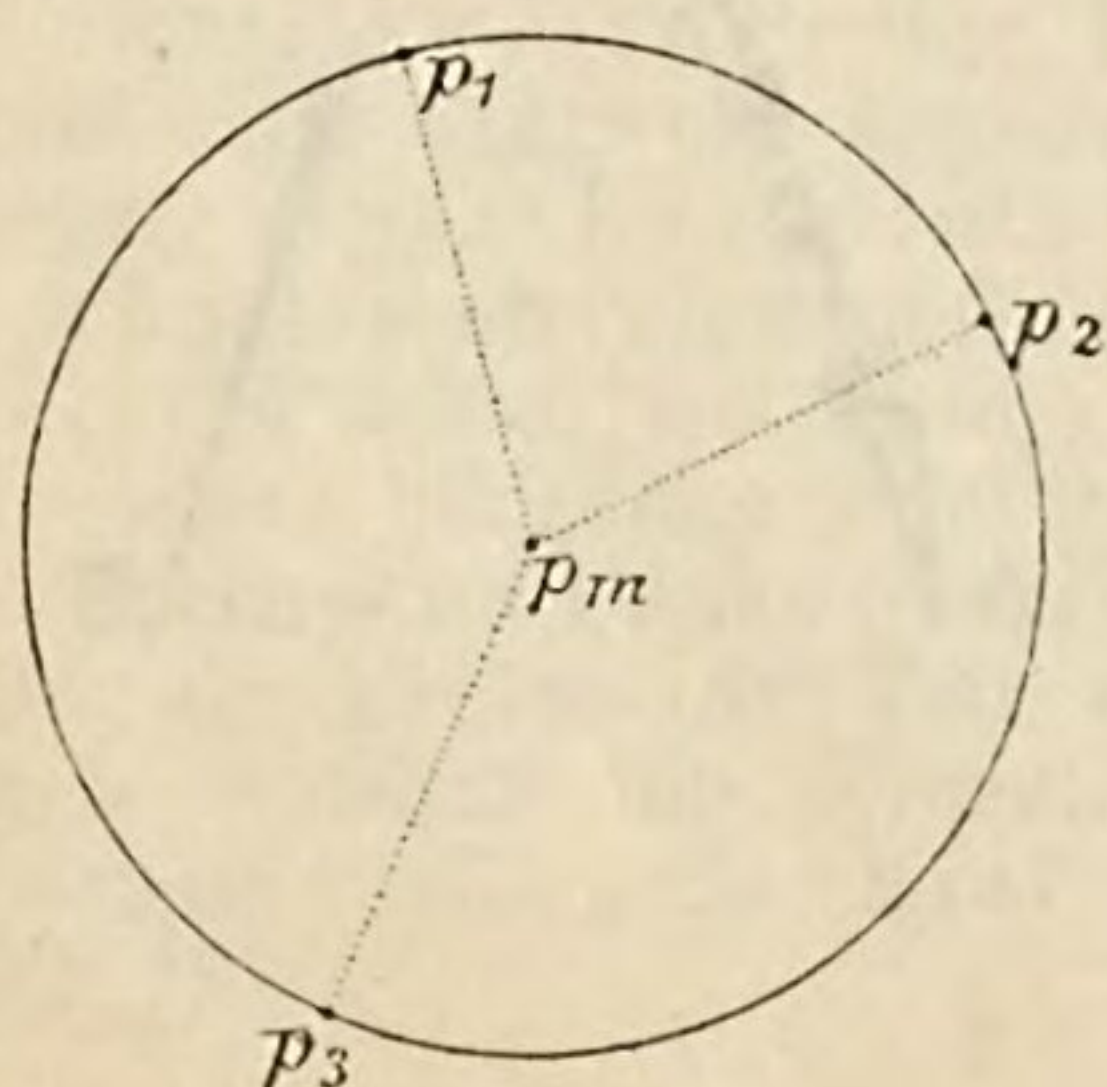
Antwort. Zieht man um einen beliebigen, in einer Ebene, z. B. in der Papierebene liegenden Punkt p_m , siehe Figur 41, mittels Blei, Kreide, Tinte, Tusche oder irgend eines andern Materials einen möglichst feinen Strich so, dass die sämtlichen Punkte, als deren ununterbrochene Aneinanderreihung man jenen Strich zu betrachten hat, wie z. B. die Punkte p_1 , p_2 , p_3 in Figur 41, von dem Mittelpunkt p_m gleiche Entfernungen haben, dass also z. B. in der Figur 41 zwischen den Strecken $p_m p_1$, $p_m p_2$ und $p_m p_3$ die Beziehung oder die Relation:

$$\overline{p_m p_1} = \overline{p_m p_2} \text{ oder } = \overline{p_m p_3}$$

(siehe Erkl. 156 und 157)

besteht, so erhält man mit jenem Strich ein Bild von einer Kreislinie (siehe die Erkl. 154).

Figur 41.



Erkl. 154. Das Ziehen eines solchen feinen Strichs, welcher die Eigenschaft haben soll, dass man mit demselben nach Antwort auf Frage 48 ein Bild einer Kreislinie erhält, kann auf verschiedene Weise erfolgen.

Man kann, rücksichtlich der in Antwort auf Frage 49 gegebenen Definition der Entstehung einer Kreislinie, einen solchen Strich, wie man zu sagen pflegt, „aus freier Hand“, d. h. ohne irgend welche Hilfsmittel, als eines Bleies, oder eines Stückes Kreide etc. ziehen; hierzu gehört praktische Uebung oder technische Fertigkeit.

Man kann zum Ziehen eines solchen Strichs sich Hilfsmittel, wie z. B. einer Schnur oder eines sog. Zirkels bedienen.

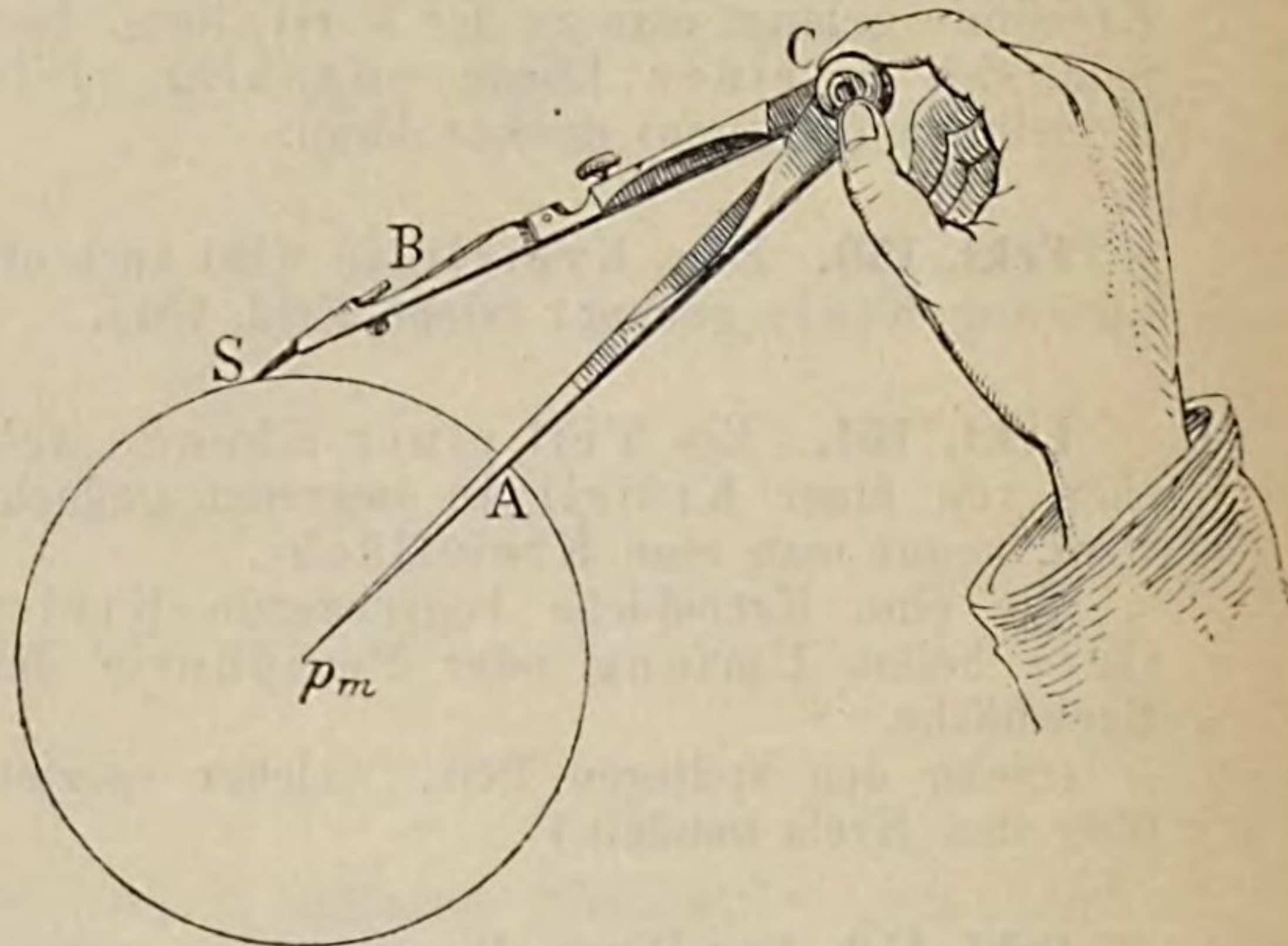
Bedient man sich einer Schnur, so muss man das eine Ende derselben festhalten, dass es einen ihm in einer Ebene zugewiesenen Ort einnimmt, dann muss man die Schnur schraff anspannen und mit dem andern Ende, an welchem ein Stück Blei oder Kreide befestigt ist, so über jene Ebene fahren, dass jenes Ende seinen Ort unverändert beibehält und dass die Schnur stets schraff angespannt bleibt. (siehe Erkl. 178).

Bedient man sich eines Zirkels, siehe Erkl. 155, so hat man nur, wie die Figur 42 zeigt, den einen Stachel in einen beliebigen Punkt einer Ebene fest einzusetzen und mit dem andern Stachel, welcher so eingerichtet ist, dass man an demselben ein Material wie Kreide, Blei etc. befestigen kann, über die Ebene zu fahren; man wird hierbei mit letzterem Stachel wieder an den ursprünglichen Ort zurückkommen. Der Beweis, warum hierbei eine Kreislinie entstehen muss, kann erst in der Stereometrie erbracht werden.

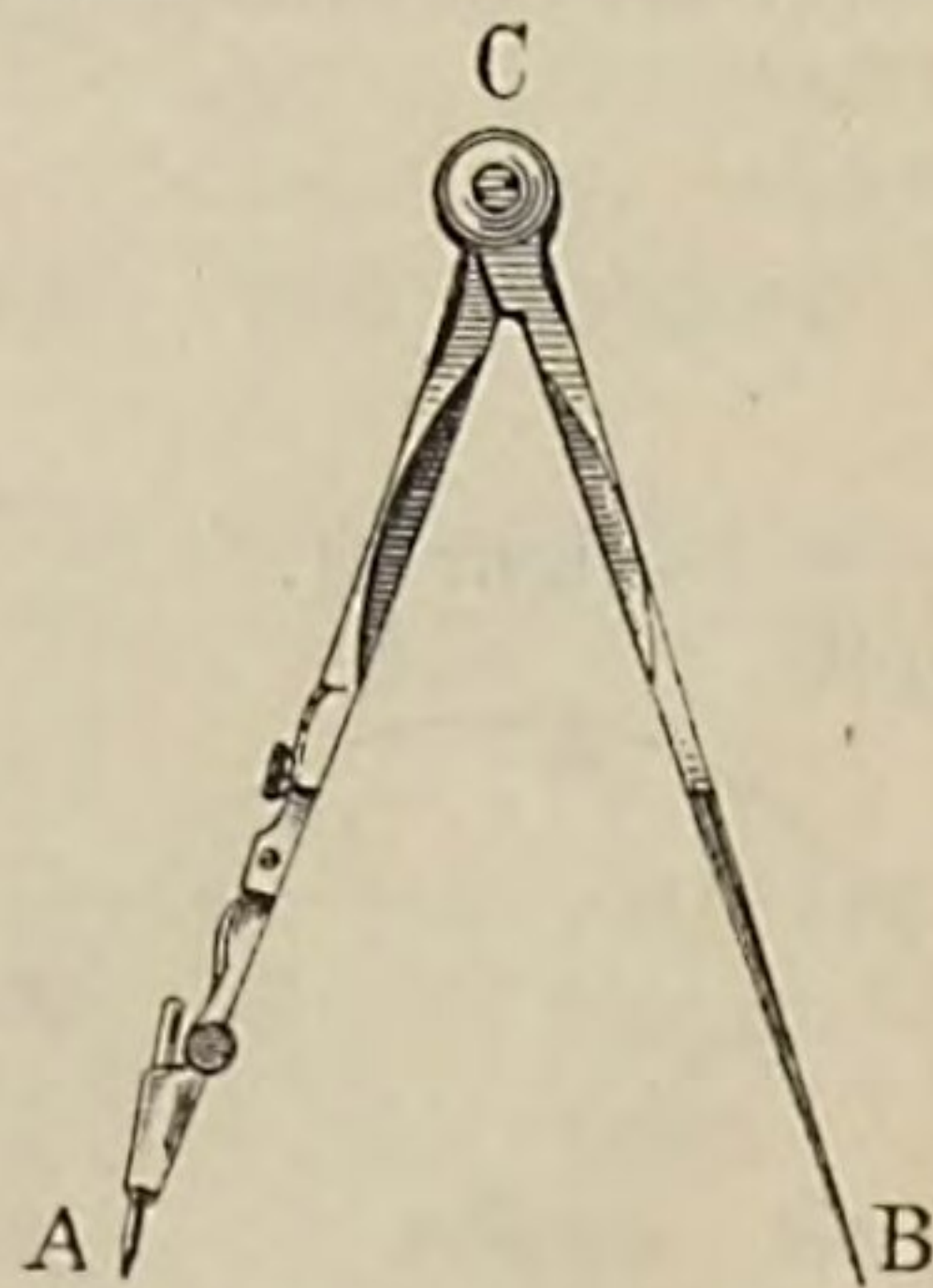
Erkl. 155. Ein Zirkel ist ein Instrument, wie es in der Figur 43 dargestellt ist, es dient dem speziellen Zweck Kreislinien zu ziehen; es hat seinen Namen von dem lateinischen Wort *circulus*, d. h. Kreis oder Ring.

Erkl. 156. Wird eine Strecke mit einer oder mehreren anderen in eine arithmetische, d. h. in eine durch eine Gleichung oder eine Ungleichung (siehe Antwort auf Frage 34), ausgedrückte Beziehung gebracht und wird hierbei die Strecke selbst durch die beiden an ihren Endpunkten stehenden Buchstaben symbolisch dargestellt, siehe Erkl. 63, so setzt man einen Querstrich über beide Buchstaben; denn: sind die Endpunkte einer Strecke z. B. durch p_1 und p_2 bezeichnet, so wird die Strecke selbst nach der Erkl. 63 symbolisch dargestellt durch $p_1 p_2$; eine solche Schreibweise zweier Buchstaben stellt aber auch in der Arithmetik, in einer Gleichung etc. ein sog. Produkt zweier gedachten Grössen p_1 und p_2 dar; da nun mittels jener Bezeichnung kein Produkt, sondern eine Strecke gemeint ist, so setzt man, wenn eine, z. B. durch $p_1 p_2$ bezeichnete Strecke in dieser Bezeichnung in einer Gleichung

Figur 42.



Figur 43.



auftritt, um jenes zu kennzeichnen, einen Querstrich über beide Buchstaben; in solchen Fällen stellt man also die betreffende Strecke nicht durch $p_1 p_2$, sondern durch $\overline{p_1 p_2}$ dar.

Erkl. 157. Durch die Gleichungen:

$$a) \dots \overline{p_m p_1} = \overline{p_m p_2}$$

$$b) \dots \overline{p_m p_1} = \overline{p_m p_3}$$

$$c) \dots \overline{p_m p_2} = \overline{p_m p_3}$$

wird zwischen den Strecken $\overline{p_m p_1}$, $\overline{p_m p_2}$ und $\overline{p_m p_3}$, Radien oder Halbmesser des Kreises um p_m die Beziehung oder die Relation ausgedrückt, dass jene Strecken gleich, somit auch nach der Erkl. 89 kongruent sind.

Jene Gleichungen a) bis c) sind in nebenstehender Antwort in der Form:

$$\overline{p_m p_1} = \overline{p_m p_2} \text{ oder } = \overline{p_m p_3}$$

zusammengeschrieben (siehe Erkl. 158 und 159).

Erkl. 158. Ein Satz aus der allgemeinen Grössenlehre heisst:

„Ist jede von zwei Grössen ein- und derselben dritten Grösse gleich, dann sind jene beiden Grössen auch unter sich gleich.“

Dieser Satz ist durch die in der Erkl. 157 enthaltenen Gleichungen a), b) und c) symbolisch dargestellt.

Erkl. 159. Da durch Gleichungen und durch Ungleichungen Beziehungen oder Relationen zwischen Grössen symbolisch dargestellt werden, so nennt man Gleichungen und Ungleichungen selbst auch Relationen.

Frage 49. Wie kann man sich eine Kreislinie entstanden denken?

Erkl. 160. Durch eine ununterbrochene Aufeinanderfolge zweier Punkte ist nach der in nebenstehender Antwort angegebenen Entstehungsweise einer Kreislinie eine solche vollkommen bestimmt; eine solche Aufeinanderfolge zweier Punkte [welche die Eigenschaft hat, dass die sie bildenden Punkte von einem dritten, bestimmten Punkt gleiche Abstände haben], ist als kleinster Teil einer Kreislinie, durch welchen die Kreislinie hiernach selbst bestimmt ist, „ein Linienelement“ (siehe Erkl. 18).

Antwort. Eine Kreislinie kann man sich wie folgt entstanden denken:

Man denke sich, wie bei der Entstehung einer Geraden, siehe Antwort auf die Frage 3, eine ununterbrochene Aufeinanderfolge von zwei Punkten $+p_1$ und $-p_1$ (ein sog. Linienelement, siehe Erkl. 18); diese beiden Punkte denke man sich durch irgend eine Ursache auseinandergeschoben und deren innegehabten Orte durch ein anderes Punktenpaar, durch zwei andere Punkte $+p_2$ und $-p_2$ ausgefüllt und zwar denke man sich diesen Vorgang so, dass nach demselben das neue Punktenpaar $+p_2$ und $-p_2$ zwischen jenen ersten Punkten $+p_1$ und $-p_1$ liegt, und dass letztere von einem bestimmten Punkt p_m , Mittelpunkt genannt, von welchem sie vorher

Erkl. 161. Eine solche ununterbrochene Aufeinanderfolge von Punkten, welche eine Kreislinie darstellt, erfüllt einen Raum und einen solchen Raum kann man eine kreisförmige Raumlinie nennen.

Erkl. 162. Von einer Ausdehnungsrichtung kann man nach der in der Erkl. 49 gegebenen Definition einer solchen bei einer Kreislinie nicht sprechen.

In Rücksicht darauf, dass man sich durch entsprechende Formveränderung einer geraden Linie eine Kreislinie gebildet denken kann, und umgekehrt, kann man die Kreislinie zu den eindimensionalen Raumgrößen zählen; man nennt zur Unterscheidung die geraden Linien: eindimensionale Raumgrößen der ersten Ordnung, die Kreislinien: eindimensionale Raumgrößen der zweiten Ordnung.

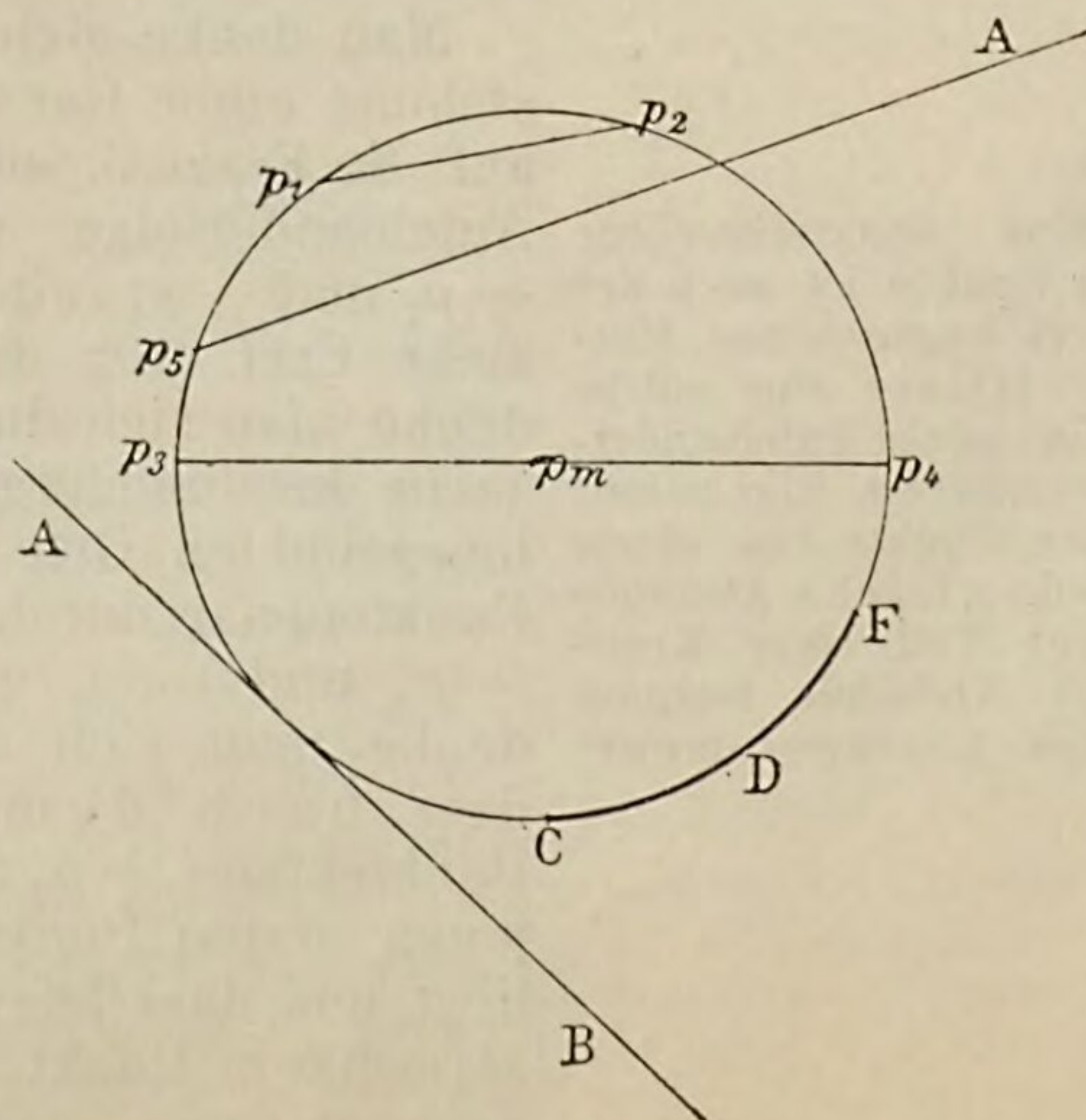
Die kreisförmigen Raumlinien gehören demnach auch zu den eindimensionalen Räumen der zweiten Ordnung.

gleiche Entfernungen oder gleiche Abstände hatten, auch in ihren neuen Lagen dieselben Entfernungen, dieselben Abstände noch haben, dabei aber auch noch in derselben Ebene liegen, welche vorher durch die andern Punkte p_m , $+p_1$ und $-p_1$ bestimmt war (siehe Lehrsatz 20).

In derselben Weise denke man sich die beiden Punkte $+p_2$ und $-p_2$ auseinandergeschoben und deren innegehabten Orte durch ein drittes Punktenpaar $+p_3$ und $-p_3$ ausgefüllt und zwar denke man sich diesen Vorgang so, dass nach demselben das neue Punktenpaar $+p_3$ und $-p_3$ zwischen den Punkten $+p_2$ und $-p_2$ liegt, dass letztere die zuletzt innegehabten Orte der Punkte $+p_1$ und $-p_1$ einnehmen und dass diese Punkte $+p_1$ und $-p_1$ wiederum von jenem bestimmten Punkt p_m dieselben Entfernungen, dieselben Abstände wie vorher haben und in derselben Ebene wie vorher liegen.

Denkt man sich diesen Vorgang ohne Unterbrechung fort- und fortgesetzt, so entsteht eine ununterbrochene Aneinanderreihung von Punkten, welche die in Antwort auf Frage 47 erwähnte Eigenschaft hat und die eine Kreislinie genannt wurde.

Figur 44.



Frage 50. Was versteht man:

- a) unter einer Sehne,
- b) unter einem Durchmesser,
- c) unter einer Sekante,
- d) unter einer Tangente einer Kreislinie oder eines Kreises; was
- e) unter einem Kreisbogen?

Erkl. 163. Unter einer Sehne einer Kreisfläche versteht man, analog dem nebenstehenden unter a) Gesagten, die durch irgend zwei Punkte der Peripherie der Kreisfläche bestimmte Strecke (siehe die Erkl. 151).

Erkl. 164. Unter einem Durchmesser einer Kreisfläche versteht man, analog dem nebenstehenden unter b) Gesagten, eine Sehne des Kreises, welche den Mittelpunkt desselben enthält (siehe die Erkl. 151 und 163).

Erkl. 165. Der Durchmesser einer Kreislinie wird auch Diameter genannt. Das Wort „Diameter“ stammt aus dem Griechischen und heisst Durchmesser.

Erkl. 166. Unter einer Sekante einer Kreisfläche versteht man, analog dem nebenstehenden unter c) Gesagten, eine über einen ihrer Endpunkte hinaus verlängerte Sehne des Kreises (siehe Erkl. 163).

Erkl. 167. Unter einer Sekante eines Kreises versteht man im weiteren Sinn eine über ihre beiden Endpunkte hinaus verlängerte Sehne einer Kreislinie, bzw. einer Kreisfläche.

Erkl. 168. Nach der Erkl. 167 ist eine Sekante eines Kreises im weitesten Sinn irgend eine Gerade, welche zwei Punkte einer Kreislinie (der Peripherie einer Kreisfläche) enthält.

Sekanten im weitesten Sinn heissen auch Transversalen.

Erkl. 169. Das Wort „Sekante“ stammt von dem lateinischen Wort „secans“, d. h. Schneidende.

Erkl. 170. Das Wort „Transversale“ stammt aus dem Lateinischen; es bedeutet eine quer durchgehende Linie (oder auch Fläche), d. i. eine Linie (Fläche), welche andere Linien (Flächen) durchschneidet.

Erkl. 171. Unter einer Tangente an eine Kreisfläche versteht man, analog dem nebenstehenden unter d) Gesagten, eine Gerade, welche durch zwei aufeinanderfolgende Punkte (durch ein Linienelement) der Peripherie der Kreisfläche bestimmt ist.

Antwort. Die in der Frage unter a) bis e) angeführten Begriffe kann man wie folgt erklären:

a) Unter einer Sehne einer Kreislinie versteht man ganz allgemein die durch irgend zwei Punkte einer Kreislinie bestimmte Strecke (siehe die Erkl. 163).

In Figur 44 stellt z. B. die Strecke p_1p_2 eine Sehne der Kreislinie um p_m dar.

b) Unter einem Durchmesser einer Kreislinie versteht man eine Sehne der Kreislinie, welche den Mittelpunkt der Kreislinie enthält.

In Figur 44 stellt z. B. die Strecke p_3p_4 oder die Sehne p_3p_4 einen Durchmesser der Kreislinie um p_m dar (siehe Erkl. 164 und 165).

c) Unter einer Sekante einer Kreislinie versteht man im engeren Sinn (in der Elementar-Geometrie) eine über einen ihrer Endpunkte hinaus verlängerte Sehne der Kreislinie.

In Figur 44 stellt z. B. der Strahl p_5A eine Sekante im engeren Sinn dar (siehe Erkl. 166 bis 170).

d) Unter einer Tangente einer Kreislinie versteht man eine Gerade, welche durch ein Linienelement der Kreislinie bestimmt ist.

In Figur 44 stellt z. B. AB eine Tangente der Kreislinie um p_m dar (siehe Erkl. 171 bis 174).

Das Linienelement, welches eine Tangente (eine Berührende) mit einer Kreislinie gemein hat, heisst Berührungsstelle (auch Berührungspunkt) der Tangente.

e) Unter einem Kreisbogen versteht man irgend ein Stück einer Kreislinie oder irgend ein Stück der Peripherie einer Kreisfläche.

In Figur 44 stellt z. B. CDF einen Teil oder ein Stück der Kreislinie um p_m , einen sog. Kreisbogen dar (siehe Erkl. 175 u. 176).

Erkl. 172. Nach der nebenstehenden unter d) gegebenen Definition einer Tangente hat dieselbe nur ein Linienelement mit der Kreislinie oder mit der Peripherie einer Kreisfläche gemein.

Erkl. 173. Durchmesser, Sehnen und Sekanten (Transversalen) einer Kreislinie oder einer Kreisfläche haben mit der Kreislinie, bezw. mit der Peripherie einer Kreisfläche stets zwei Punkte gemein, welche keine Aufeinanderfolge bilden oder welche auseinanderliegen.

Eine Tangente an eine Kreislinie oder an eine Kreisfläche hat ebenfalls mit der Kreislinie, bezw. mit der Peripherie der Kreisfläche zwei Punkte gemein, diese beiden aber bilden eine Aufeinanderfolge, ein sog. Linienelement.

Erkl. 174. Das Wort Tangente kommt von dem lateinischen Wort tangens, d. h. Berührende.

Erkl. 175. Unter einem Kreisbogen versteht man auch oft eine ganze Kreislinie, bezw. die ganze Peripherie einer Kreisfläche.

Erkl. 176. Einen Kreisbogen nennt man auch oft kurzweg „Bogen“ oder lat. „arcus“. Die Bezeichnung arcus, abgekürzt „arc.“, gebraucht man meistens nur dann, wenn der Radius der Kreislinie die Längen-Masseinheit ist.

Frage 51. Zu welchen Vorstellungen gelangt man mittels der in Antwort auf die Frage 49 angegebenen Entstehung einer Kreislinie?

Erkl. 177. Das in nebenstehender Antwort unter 1) Gesagte führt zu der Vorstellung geradliniger und krummliniger Bewegungen.

Erkl. 178. Das in nebenstehender Antwort unter 3) Gesagte wird oft dazu benutzt, eine Kreislinie bildlich darzustellen (siehe Erkl. 154 und 179).

Erkl. 179. Bewegt sich eine Strecke in der in nebenstehender Antwort unter 3) angegebenen Weise, so sagt man auch: der nicht feste (oder bewegliche) Endpunkt der Strecke beschreibt eine kreisförmige Bahn (oder eine Kreislinie).

Antwort. Mittels der in Antwort auf Frage 49 angegebenen Entstehung einer Kreislinie gelangt man zu folgenden Vorstellungen:

1) Man gelangt zu der Vorstellung, dass der Weg oder die Bahn, welche ein Punkt bei einer Bewegung zurücklegt, nicht allein eine gerade Raumlinie, sondern auch eine kreisförmige Raumlinie sein kann (s. Erkl. 177).

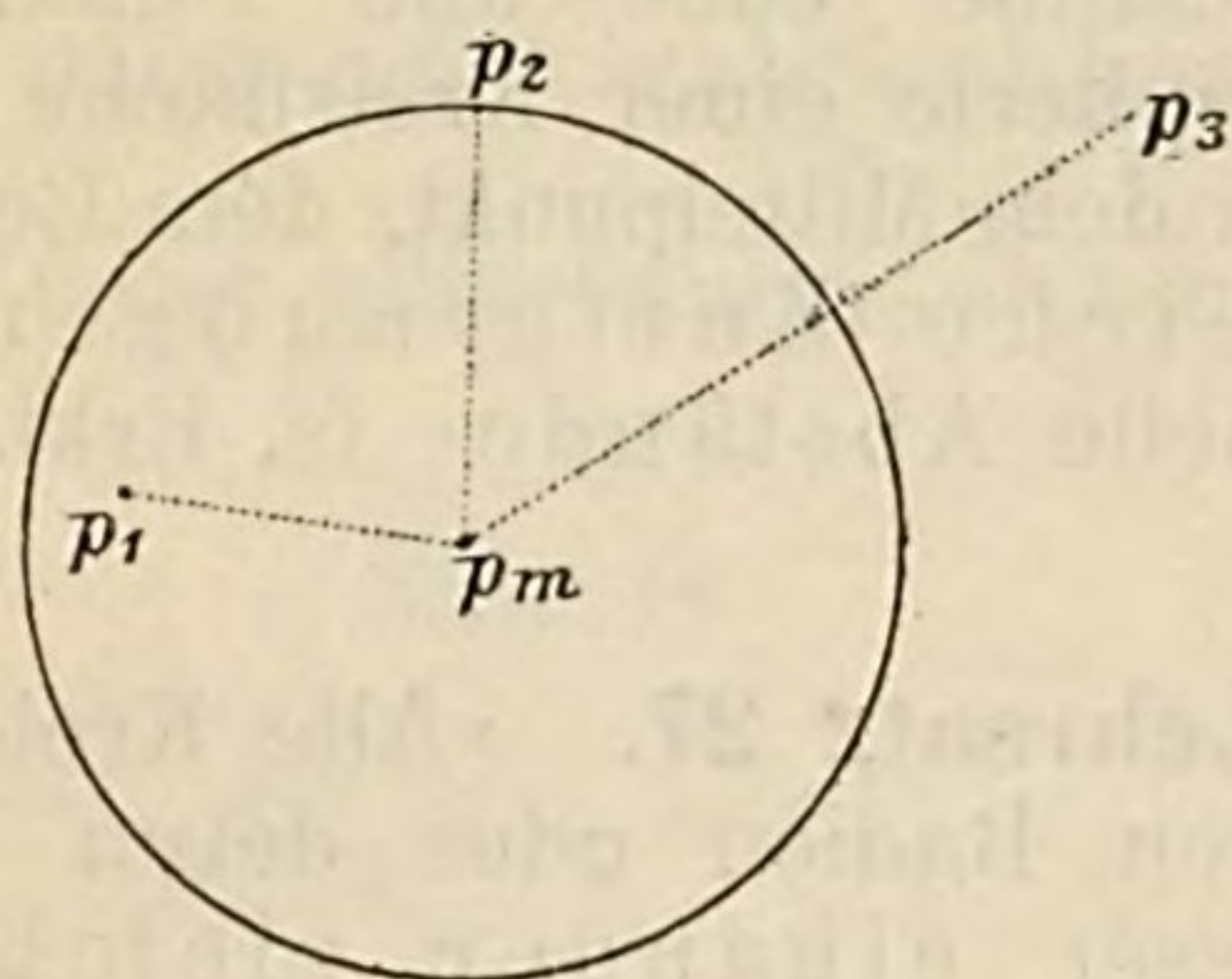
2) Man gelangt zu der Vorstellung, dass die Kreislinie eine in sich zurücklaufende oder zurückkehrende krumme Linie (oder Curve) ist.

3) Man gelangt zu der Vorstellung, dass wenn sich eine in einer Raumebene befindliche Strecke so bewegt, dass einer ihrer Endpunkte die ihm einmal gegebene Lage unverändert bei-

Erkl. 180. Von allen den gedachten einzelnen Punkten, welche einer Ebene angehören, und deren Entfernungen oder Abstände von dem Mittelpunkt einer dieser Ebene angehörnden Kreislinie kleiner sind als der Radius derselben, sagt man: sie liegen, wie der Mittelpunkt der Kreislinie selbst, innerhalb der Kreislinie; von allen anderen der Ebene angehörnden Punkten, deren Entfernungen vom Mittelpunkt der Kreislinie grösser als der Radius derselben sind, sagt man: sie liegen ausserhalb der Kreislinie.

In Figur 45 sind p_m und p_1 Punkte, welche innerhalb der Kreislinie liegen; p_2 ist ein Punkt, welcher der Kreislinie angehört, und p_3 ist ein Punkt, welcher ausserhalb des Kreises liegt.

Figur 45.



Frage 52. Welche einfachen Sätze ergeben sich als Folgerungen aus dem, was vorstehend über die Kreislinie, bzw. über den Kreis gesagt wurde?

Erkl. 181. Die Richtigkeit der in dem Lehrsatz 22 gemachten Aussage ergibt sich aus der in Antwort auf die Frage 47 gegebenen Definition einer Kreislinie (siehe Erkl. 151).

behält und die Strecke selbst bei einer gedachten Bewegung stets in der Raumebene bleibt, der andere Endpunkt (bzw. jeder gedachte einzelne Punkt der Strecke) bei dieser Bewegung einen Weg zurücklegt, welcher eine kreisförmige Raumlinie ist (s. Erkl. 161). Die Strecke ist alsdann der Radius der kreisförmigen Bahn (siehe Erkl. 178 und 179).

4) Man gelangt zu der Vorstellung, dass zu jedem Halbmesser (zu jedem Radius) einer Kreislinie oder einer Kreisfläche ein zweiter Halbmesser (ein zweiter Radius) gehört, welcher mit jenem eine Sehne, bzw. einen Durchmesser bildet.

5) Man gelangt zu der Vorstellung, dass jeder einer Ebene angehörnde Punkt, welcher von dem Mittelpunkt einer derselben Ebene angehörnden Kreislinie eine solche Entfernung hat, die gleich dem Radius dieses Kreises ist, ein Punkt der Kreislinie selbst sein muss (siehe Erkl. 180).

Antwort. In Rücksicht auf das bis hierher über die Kreislinie oder den Kreis Gesagte kann man folgende Aussagen machen:

Lehrsatz 22. »Alle Halbmesser (oder Radien) einer und derselben Kreislinie oder eines und desselben Kreises sind einander gleich oder sind gleich lang« (siehe Erkl. 181).

Lehrsatz 23. »Zwischen einem Durchmesser und einem Radius eines und desselben Kreises besteht die Beziehung, dass der Durchmesser das Doppelte des Radius, oder dass der Radius die Hälfte des Durchmessers ist« (s. Erkl. 182 und 183).

Lehrsatz 24. »Alle Durchmesser einer und derselben Kreislinie oder

Erkl. 182. Bezeichnet man den Durchmesser eines Kreises mit d , den Radius desselben Kreises mit r , so bestehen zwischen diesen beiden Strecken nach dem nebenstehenden Lehrsatz die Beziehungen:

$$1) \dots d = 2 \cdot r$$

oder:

$$2) \dots r = \frac{d}{2}$$

Erkl. 183. Die Richtigkeit der in dem Lehrsatz 23 gemachten Aussage ergibt sich aus dem in Antwort auf Frage 51 unter 4) Gesagten.

Erkl. 184. Die Richtigkeit der in dem Lehrsatz 24 gemachten Aussage ergibt sich aus den Lehrsätzen 22 und 23.

Erkl. 185. Die Richtigkeit der in den Lehrsätzen 25 und 26 gemachten Aussagen ergibt sich aus der in der Antwort auf die Frage 47 gegebenen Definition einer Kreislinie, bzw. aus der in der Erkl. 151 gegebenen Definition einer Kreisfläche.

Erkl. 186. Die Richtigkeit der in dem Lehrsatz 27 gemachten Aussage ergibt sich aus der Vorstellung, dass man zwei Kreislinien, deren Radien oder Durchmesser gleich sind, so aufeinandergelegt denken kann, dass sie sich vollkommen decken, d. h. dass jeder gedachte einzelne Punkt der einen Kreislinie auf einen Punkt der andern Kreislinie zu liegen kommt, woraus sich schliessen lässt, dass beide Kreislinien sowohl in Bezug auf ihren absoluten Wert, als auch in Bezug auf die Art und Weise der Nebeneinanderlagerung der sie bildenden absoluten Einheiten (Punkte) vollkommen übereinstimmen (siehe Erkl. 187).

Erkl. 187. Aus den Erkl. 186 und 84 ergibt sich, dass kongruente Kreislinien auch gleich sind.

Erkl. 188. Die Richtigkeit der in dem Lehrsatz 28 gemachten Aussage ergibt sich ebenfalls aus der Vorstellung, dass man die beiden Teile, die beiden Kreisbögen, in welche eine Kreislinie durch einen ihrer Durchmesser zerlegt wird, so aufeinandergelegt denken kann, dass sie sich vollkommen decken (siehe die Erkl. 186 und 189).

eines und desselben Kreises sind einander gleich oder sind gleich lang« (siehe Erkl. 184).

Lehrsatz 25. »Der Mittelpunkt (das Centrum) einer Kreislinie oder einer Kreisfläche hat von allen Punkten der Kreislinie, bzw. von allen Punkten der Peripherie einer Kreisfläche gleiche Entfernungen oder gleiche Abstände« (siehe Erkl. 185).

Lehrsatz 26. »Alle Punkte einer Kreislinie oder alle Punkte der Peripherie einer Kreisfläche haben von dem Mittelpunkt, dem Centrum, gleiche Entfernungen oder gleiche Abstände« (s. Erkl. 185).

Lehrsatz 27. »Alle Kreislinien, deren Radien oder deren Durchmesser einander gleich sind, sind kongruent« (siehe Erkl. 186).

Lehrsatz 28. »Jeder Durchmesser teilt die Kreislinie in zwei kongruente Teile; diese werden Halbkreise genannt« (siehe Erkl. 188).

Lehrsatz 29. »Von den Punkten, welche einer Ebene angehören, kann man in Bezug auf die Entfernungen dieser Punkte von dem Mittelpunkt einer dieser Ebene angehörenden Kreislinie folgendes aussagen:

- a) Ist die Entfernung eines jener Punkte gleich dem Radius jener Kreislinie, so muss der betreffende Punkt ein Punkt der Kreislinie sein.
- b) Ist die Entfernung eines jener Punkte kleiner als der Radius jener Kreislinie, so muss er, wie der Mittelpunkt, innerhalb der Kreislinie liegen.
- c) Ist die Entfernung eines jener Punkte grösser als der Radius

Erkl. 189. Aus den Erkl. 188 und 84 ergibt sich, dass kongruente Halbkreise auch gleich sind.

Erkl. 190. Die Richtigkeit der in dem Lehrsatz 29 gemachten Aussage ergibt sich aus dem in Antwort auf Frage 51 unter 5) Gesagten und aus der Erkl. 180.

jener Kreislinie, so muss er ausserhalb der Kreislinie liegen.«

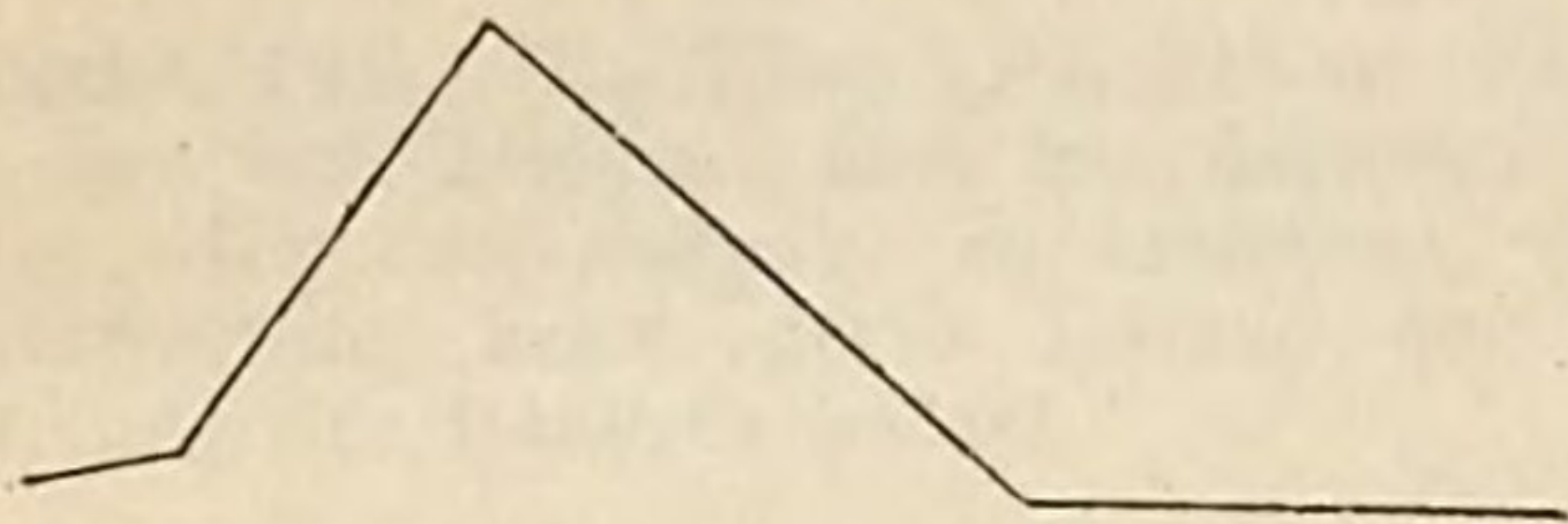
(Siehe Erkl. 190 und Figur 45.)

Anmerkung 4. Weitere Lehrsätze über die Kreislinie und den Kreis sind in dem Teil enthalten, welcher speziell über den Kreis handelt.

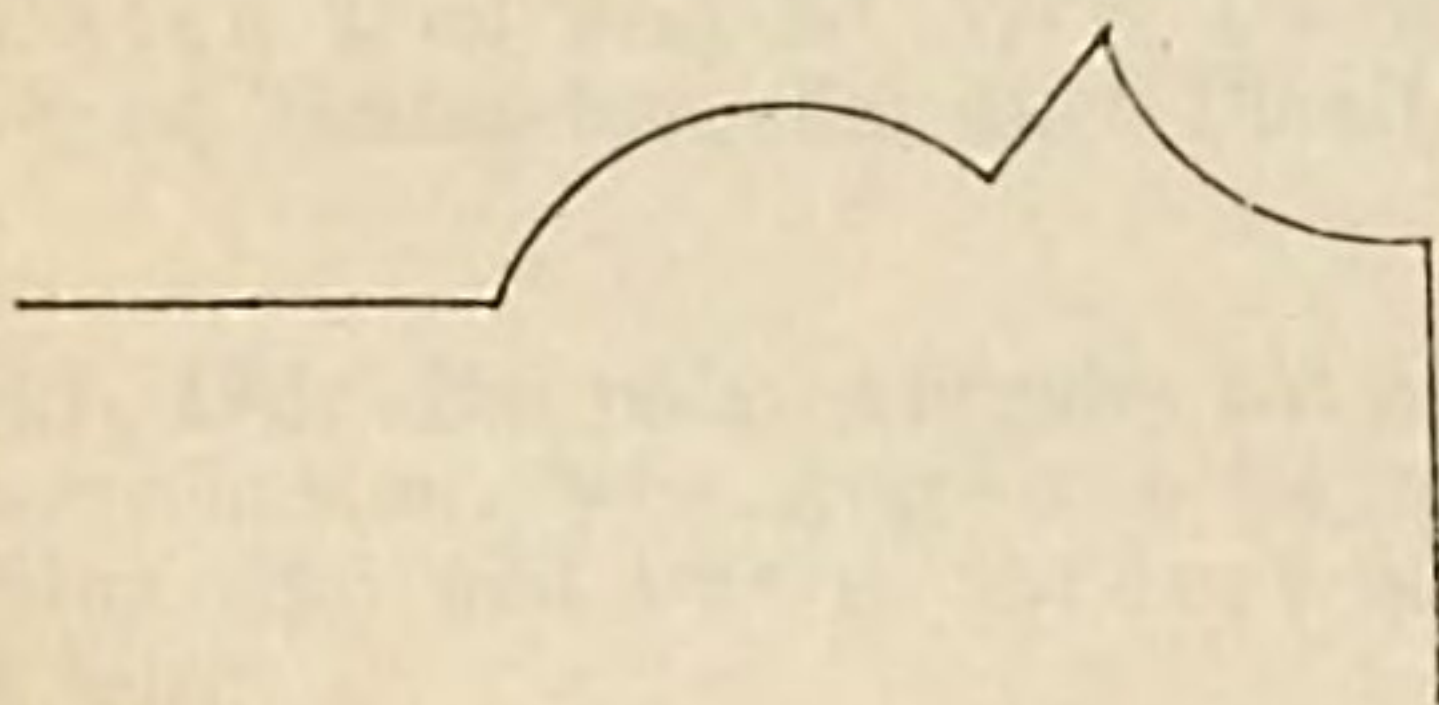
Frage 53. Was versteht man in der ebenen Elementar-Geometrie

- a) unter einer gebrochenen
und
b) unter einer gemischten
Linie?

Figur 46.

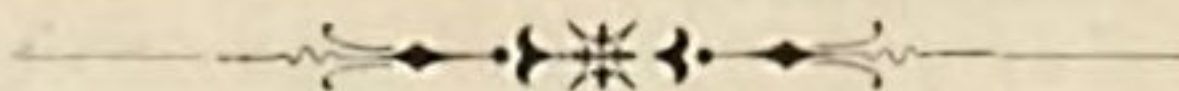


Figur 47.



Antwort. In der ebenen Elementar-Geometrie versteht man unter einer gebrochenen Linie eine Aufeinanderfolge von Strecken, von welchen je zwei aufeinanderfolgende nur einen Punkt gemein, dabei aber verschiedene Richtungen haben; Figur 46 stellt z. B. eine gebrochene Linie dar.

Unter einer gemischten Linie versteht man eine Aufeinanderfolge von Strecken und Kreisbogen, wie z. B. durch die Figur 47 dargestellt ist.



Die ...
...

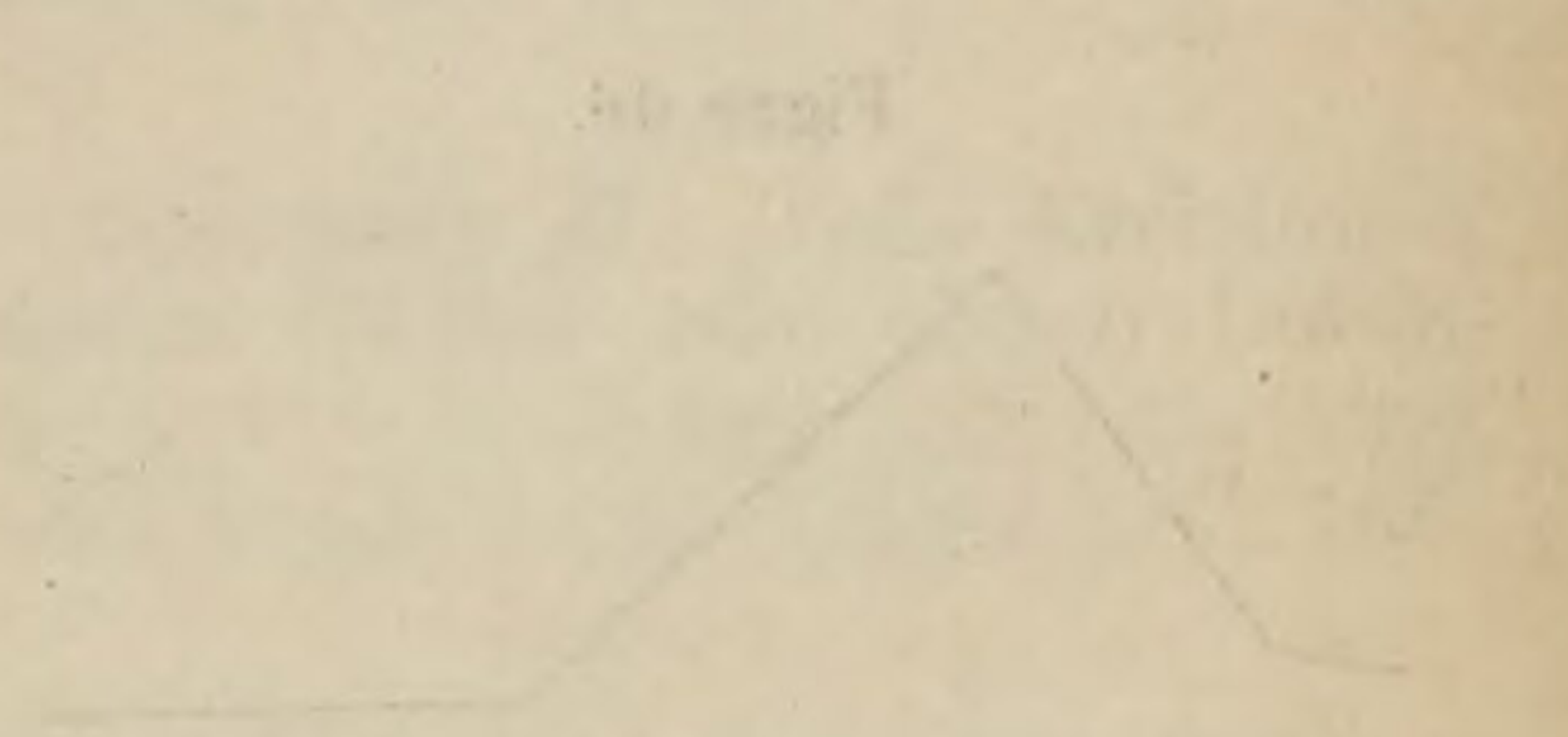
(1871-1872)

...

...

...

...



Aufgabensammlung.

A) Ueber geometrische Aufgaben im allgemeinen.

Frage 54. Was versteht man unter einer geometrischen Aufgabe im allgemeinen?

Erkl. 191. Das Wort „Problem“ stammt aus dem Griechischen; man hat darunter eine Frage oder eine Aufgabe zu verstehen, deren Beantwortung bzw. deren Lösung der Vermittelung des Denkens bedarf.

Erkl. 192. Die in einer Aufgabe gegebenen Beziehungen zwischen zwei oder mehreren Grössen heissen gegebene Bestimmungsstücke oder Daten (von dem lat. Wort Datum, d. h. Gegebenes, Thatsachen oder auch Inhalt; Plural Data).

Erkl. 193. Bei jeder Aufgabe hat man wohl zu unterscheiden, was gegeben ist oder was die Daten sind und was gefordert oder verlangt wird.

Erkl. 194. Unter „Zeichnen“ versteht man im allgemeinen die bildliche Darstellung von Raum- oder geometrischen Grössen mittels irgend eines Materials wie Blei, Kreide, Tinte, Tusche, Farben etc.

Je nach den bei dem Zeichnen zur Verwendung kommenden Materialien, je nach den Zwecken, welche mit der bildlichen Darstellung geometrischer Grössen zu erreichen gesucht werden, je nach der Form der Fläche, auf welcher die bildliche Darstellung stattfindet, je nach der Lage dieser Fläche zu der darzustellenden Raumgrösse und zu dem die Zeichnung Ausführenden, und je nachdem besondere Hilfswerkzeuge zur Hand genommen werden oder nicht etc., unterscheidet man verschiedene Arten des Zeichnens, verschiedene Zeichenmethoden. (Siehe die Teile der Encyclopädie, welche speziell über das Zeichnen handeln.)

Antwort. Unter einer geometrischen Aufgabe oder einem geometrischen Problem (siehe Erkl. 191) versteht man die Forderung, aus gegebenen Raumgrössen und gegebenen Beziehungen zwischen denselben andere Raumgrössen oder andere Beziehungen zwischen solchen zu finden.

Je nachdem man, um der in einer geometrischen Aufgabe gestellten Forderung Genüge zu leisten oder wie man zu sagen pflegt, um die Aufgabe zu lösen, sich einer Zeichnung, einer Konstruktion oder einer Rechnung bedient, bzw. bedienen soll oder muss, unterscheidet man: Konstruktionsaufgaben oder eigentliche geometrische Aufgaben und Berechnungsaufgaben oder arithmetische, algebraische oder analytische Aufgaben (siehe Erkl. 192 bis 195).

Erkl. 195. Das Zeichnen, bei welchem Zirkel, Lineal und andere Hilfswerkzeuge zur Hand genommen werden, nennt man speziell das geometrische Zeichnen oder das Konstruieren (vom lat. Wort construere, d. h. aufbauen, zusammenfügen, errichten).

Frage 55. Worin besteht die Auflösung einer geometrischen Aufgabe?

Erkl. 196. Die Analysis (siehe Erkl. 30) zu einer geometrischen Aufgabe besteht im allgemeinen darin, dass man die Aufgabe als bereits gelöst annimmt und die Beziehungen aufsucht, welche zwischen dem in der Aufgabe Gegebenen und dem in der Aufgabe Gesuchten bestehen; dann

bei einer Konstruktionsaufgabe diese Beziehungen an einer entsprechenden Figur feststellt,

bei einer Berechnungsaufgabe diese Beziehungen durch Bestimmungsgleichungen ausdrückt (siehe Erkl. 199).

Erkl. 197. Die Analysis, welche zum Auflösen einer Konstruktionsaufgabe gehört, heisst auch geometrische Analysis; die, welche zu einer Berechnungs- oder arithmetischen Aufgabe gehört, heisst arithmetische Analysis.

Erkl. 198. Die Konstruktion einer geometrischen Aufgabe besteht darin, dass man mittels der in der Analysis gefundenen Beziehungen zwischen dem Gegebenen und dem Gesuchten die in der Aufgabe gestellte Forderung ausführt.

Erkl. 199. In der Erkl. 84 wurde angegeben, was unter einer Gleichung zu verstehen ist; der in dieser Erklärung gegebene Begriff einer Gleichung kann wie folgt erweitert werden:

Eine Gleichung ist die Verbindung zweier solcher Grössen durch das Zeichen $=$, Gleichheitszeichen genannt, welche die Eigenschaft haben, dass sie rücksichtlich ihrer (absoluten oder relativen) Werte übereinstimmen, eine Einerleiheit, eine Identität (identitas, von idem, d. h. dasselbe) zeigen oder identisch sind; das was linker Hand des Zeichens $=$ zu stehen kommt, heisst die linke Seite, das was rechter Hand zu stehen kommt, heisst die rechte Seite der Gleichung.

Jede der die Seiten einer Gleichung bildenden Grössen kann ein einfaches Symbol sein, durch welches die betreffende Grösse selbst ersetzt (symbolisch dargestellt) wird, oder sie kann ein, mittels eines arithmetischen Ausdrucks symbolisch dargestellter Vorgang sein, dessen Resultat die gedachte Grösse von jener bestimmten Eigenschaft ist.

Antwort. Die Auflösung einer geometrischen Aufgabe besteht:

- a) aus der sog. Analysis (siehe Erkl. 196 und 197);
 - b) bei Konstruktionsaufgaben aus der Konstruktion (siehe Erkl. 198), bei Berechnungsaufgaben in der Auflösung einer oder mehrerer sog. Bestimmungsgleichungen (siehe Erkl. 199 und 199a);
 - c) aus dem Beweis (siehe Erkl. 200);
- und
- d) aus der Determination (siehe Erkl. 201).

Eine Gleichung bleibt nur dann als solche bestehen, wenn mit jeder Aenderung der einen Seite auch eine solche entsprechende Aenderung der andern Seite stattfindet, durch welche die vorstehend angeführte Grundeigenschaft einer Gleichung nicht alteriert wird.

Stimmen die beiden Seiten einer Gleichung vollkommen überein, wie z. B. in den Gleichungen: $5 = 5$
so heisst eine solche Gleichung eine identische Gleichung.

$$\begin{aligned} &5 = 5 \\ &a = a \\ &a + b = a + b \end{aligned}$$

Sind die beiden Seiten einer Gleichung so beschaffen, dass sie ihren äusseren Formen nach verschieden sind, aber ihren (absoluten, bezw. relativen) Werten nach übereinstimmen, wie z. B. die Gleichungen: $4 + 7 = 11$
so nennt man eine solche Gleichung eine analytische Gleichung, oder auch eine Formel, da die eine Seite als eine Umformung, eine Entwicklung, eine andere Schreibweise der andern Seite betrachtet werden kann, und da somit eine solche Gleichung ein Gesetz, eine Regel oder einen bestimmten Satz symbolisch darstellt.

$$\begin{aligned} &4 + 7 = 11 \\ &\frac{6}{3} = 2 \\ &4 \cdot 5 = 20 \\ &(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ &\frac{m^4}{m^2} = m^2, \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Hat man eine Gleichung, welche weder eine identische noch eine analytische ist, und kommen in einer solchen Gleichung Grössen vor, deren Werte als unbekannt (nicht bestimmt oder nicht beliebig wählbar) und als noch so zu bestimmend betrachtet werden sollen, damit diese Gleichung zu einer analytischen, bezw. zu einer identischen Gleichung wird, so nennt man eine solche Gleichung eine synthetische oder eine Bestimmungsgleichung (siehe Erkl. 199 a).

Erkl. 199 a. Hat man z. B. eine Gleichung von der Form:

$$x + 2 = 5$$

so ist eine solche Gleichung dem Wortlaut nach sinnlos, sie ist weder eine identische noch eine analytische Gleichung; wird aber dem Buchstaben x die Bedeutung beigelegt, dass er einen noch zu bestimmenden Zahlenwert darstellen soll, der für ihn in jene Gleichung eingesetzt oder substituiert, dieselbe zur analytischen:

$$3 + 2 = 5$$

bezw. zur identischen Gleichung:

$$5 = 5$$

macht, so hat jene Gleichung eine ganz bestimmte Bedeutung, rücksichtlich deren sie eine Bestimmungsgleichung genannt wird.

Erkl. 200. Der Beweis einer geometrischen Aufgabe hat den Zweck, darzuthun, dass durch die ausgeführte Konstruktion den in der Aufgabe enthaltenen Bedingungen auch wirklich Genüge geleistet ist.

Den Beweis selbst nennt man einen geometrischen Beweis, wenn man sich in demselben nur Figuren und geometrischer Sätze bedient; er heisst ein arithmetischer oder analytischer Beweis, wenn man sich in dem Beweis arithmetischer Beziehungen oder Gleichungen bedient.

Erkl. 201. Die Determination (vom lat. Wort *determinare*, d. h. begrenzen, bestimmen) einer geometrischen Aufgabe besteht darin, festzustellen, ob die Aufgabe nur eine oder mehrere Lösungsergebnisse zulässt, und unter welchen Bedingungen sie möglich ist, bezw. unmöglich wird (siehe Erkl. 201 a).

Erkl. 201 a. Ergibt die Determination, dass eine Aufgabe nur eine oder eine beschränkte aber bestimmte Anzahl von Lösungen zulässt, so nennt man die Aufgabe eine bestimmte Aufgabe.

Anmerkung 5. In den nachfolgenden Abschnitten B) und C) sind einige Aufgaben mit den Auflösungen vorgeführt; hierbei ist von einer der Auflösung vorausgehenden Analysis und von einem der Auflösung folgenden Beweis, desgleichen von einer Determination Abstand genommen, da diese Aufgaben zu einfach sind, als dass solches nötig wäre. Aufgaben, deren Auflösungen eine vollständige Analysis, einen Beweis und eine Determination enthalten, findet man in späteren Abschnitten.

B) Berechnungsaufgaben.

Aufgabe 1. Eine Strecke ist 10 km 19 m 4 dm 1 cm 7 mm lang; man soll die Länge dieser Strecke in Millimeter ausdrücken.

Erkl. 202. In der Arithmetik bezeichnet man gewöhnlich solche Grössen, deren Werte unbekannt sind und bestimmt werden sollen, mit einem der letzten Buchstaben x, y, z des Alphabets.

Erkl. 203. Ist die Länge einer Strecke z. B. mit 10 km 19 m bezeichnet, so heisst dies, die Länge der betreffenden Strecke beträgt 10 km und 19 m

Da in der Arithmetik das Wort „und“, welches ein Hinzufügen (Addieren) bedeutet, durch das Zeichen $+$ (plus, d. h. „mehr“) symbolisch dargestellt wird, so schreibt man dementsprechend 10 km 19 m arithmetisch auch $10 \text{ km} + 19 \text{ m}$

Erkl. 204. Ein Satz aus der Arithmetik heisst:

„Benannte Zahlen kann man nur dann nach den Regeln der Arithmetik zu einander addieren (oder voneinander subtrahieren), wenn sie gleichnamig sind, wenn durch sie Grössen (Mehrheiten) dargestellt sind, deren Bildungseinheiten dieselben sind; ungleichnamig benannte Zahlen müssen deshalb vor der Addition (oder Subtraktion) gleichnamig gemacht werden können, wenn eine Addition der betreffenden Zahlen möglich sein soll.“ (Siehe Erkl. 204a.)

Mittels des in der Erkl. 109 angegebenen Schemas und der in den Erkl. 205 und 206 erwähnten Regeln über die Multiplikation und Division einer Zahl mit 10, 100, 1000 etc. kann man leicht solche benannte Zahlen, deren Benennungen auf eine der Einheiten des metrischen Maasses Bezug haben, in andere, höhere oder niedere, auf das metrische Maass Bezug habende Benennungen (Maasseinheiten) verwandeln.

Erkl. 205. Zwei Multiplikationsregeln heissen:

- 1) Man multipliziert eine ganze Zahl mit 10, 100, 1000 etc., indem man jener Zahl bezw. 1, 2, 3 etc. Nullen anhängt.
- 2) Man multipliziert einen Decimalbruch mit 10, 100, 1000 etc., indem

Auflösung. Bezeichnet man die in mm ausgedrückte Länge der Strecke nach der Erkl. 202 mit x , so ist gemäss der Aufgabe und nach der Erkl. 203:

$$1) \dots x = 10 \text{ km} + 19 \text{ m} + 4 \text{ dm} + 1 \text{ cm} + 7 \text{ mm}$$

Um die Strecke x in mm auszudrücken (siehe Erkl. 104), berücksichtige man, dass nach dem in der Erkl. 109 aufgestellten Schema:

$$a) \dots 1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

dass ferner:

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$$

also nach a):

$$b) \dots 1 \text{ dm} = 100 \text{ mm}$$

dass ferner:

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$$

also nach b):

$$c) \dots 1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$$

und dass ferner:

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

also nach c):

$$d) \dots 1 \text{ km} = 1000000 \text{ mm}$$

ist.

In Rücksicht der Gleichungen a) bis d) geht Gleichung 1) über in:

$$2) \dots x = 10 \cdot 1000000 \text{ mm} + 19 \cdot 1000 \text{ mm} + 4 \cdot 100 \text{ mm} + 1 \cdot 10 \text{ mm} + 7 \text{ mm}$$

Führt man die angedeuteten Multiplikationen und Additionen nach den Erkl. 205 bis 207 aus, so erhält man für die in mm auszudrückende Länge x jener gedachten Strecke:

$$A) \dots x = 10019417 \text{ mm}$$

man das Decimalkomma jenes Decimalbruchs eine, bzw. zwei, drei etc. Stellen nach rechts versetzt (nötigenfalls Nullen vorsetzt).

Erkl. 206. Zwei Divisionsregeln heissen:

- 1) Man dividiert eine ganze Zahl mit 10, 100, 1000 etc., indem man jener Zahl eine, bzw. zwei, drei etc. Stellen von rechts nach links durch ein Decimalkomma abschneidet (nötigenfalls der Zahl Nullen vorsetzt).
- 2) Man dividiert einen Decimalbruch mit 10, 100, 1000 etc., indem man das Decimalkomma jenes Decimalbruchs eine, bzw. zwei, drei etc. Stellen von rechts nach links versetzt (nötigenfalls dem Decimalbruch Nullen vorsetzt).

Erkl. 207. Die in Gleichung 2) der Auflösung der Aufgabe 1 angedeutete Addition führt man, nachdem vorher die angedeuteten Multiplikationen, wie in der Erkl. 205 gesagt, ausgeführt sind, wie folgt aus:

$$\begin{array}{r}
 10000000 \text{ mm} \\
 19000 \text{ „} \\
 400 \text{ „} \\
 10 \text{ „} \\
 7 \text{ „} \\
 \hline
 10019417 \text{ mm}
 \end{array}$$

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über das Rechnen handeln.)

Aufgabe 2. Von einer Strecke, welche 5 hm 14 Dm 3 m 7 dm 9 cm 1 mm beträgt oder misst, soll die Länge in Meter angegeben werden.

Erkl. 208. Führt man die in nebenstehender Gleichung 2) angedeuteten Multiplikationen aus, so erhält man nach der Erkl. 209:

$x = 500 \text{ m} + 140 \text{ m} + 3 \text{ m} + 0,7 \text{ m} + 0,09 \text{ m} + 0,001 \text{ m}$
mithin nach der Erkl. 210:

$$\begin{array}{r}
 x = 500 \\
 + 140 \\
 + 3 \\
 + 0,7 \\
 + 0,09 \\
 + 0,001 \\
 \hline
 \text{oder} = 643,791 \text{ m}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 500 \\ 140 \\ 3 \\ 0,7 \\ 0,09 \\ 0,001 \end{array}} \right\} \text{ m}$$

Erkl. 209. Eine Regel aus der Decimalbruchrechnung heisst:

„Ein Decimalbruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert (oder umgekehrt), indem man die angedeutete Multiplikation ausführt, als sei das Decimalkomma nicht vorhanden; dann in dem somit erhaltenen Produkt so viele Stellen von rechts nach links durch ein Decimalkomma abschneidet, als jener Decimalbruch Decimalstellen hat.“

(Siehe den Teil der Encyklopädie, welcher über die Decimalbruchrechnung handelt.)

Erkl. 204a. Eine benannte Zahl ist eine Grösse (Mehrheit), deren Bildungseinheit benannt ist; eine unbenannte Zahl ist eine Grösse (Mehrheit), deren Bildungseinheit nicht benannt, unbenannt, und ganz allgemein durch die Zahleneinheit, durch die Eins, dargestellt ist.

Auflösung. Bezeichnet man durch x die in m ausgedrückte Länge der gemessenen Strecke, so ist gemäss der Aufgabe und nach der Erkl. 203:

$$1) \dots x = 5 \text{ hm} + 14 \text{ Dm} + 3 \text{ m} + 7 \text{ dm} + 9 \text{ cm} + 1 \text{ mm}$$

Um nun die Länge der Strecke in m auszudrücken, beachte man, dass nach dem in der Erkl. 109 aufgestellten Schema:

$$a) \dots 1 \text{ dm} = 0,1 \text{ m}$$

dass ferner:

$$1 \text{ cm} = 0,1 \text{ dm}$$

also nach Gleichung a):

$$b) \dots 1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}$$

und dass ferner:

$$1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm}$$

also nach Gleichung b):

$$c) \dots 1 \text{ mm} = 0,001 \text{ m}$$

dass ferner:

$$d) \dots 1 \text{ Dm} = 10 \text{ m}$$

und dass schliesslich:

$$1 \text{ hm} = 10 \text{ Dm}$$

Erkl. 210. Eine Regel über die Addition von Decimalbrüchen heisst:

„Man schreibe die zu addierenden Decimalbrüche nach ihrem Stellenwert genau unter einander, so dass auch die Decimalkommata genau untereinander stehen, addiere dann wie bei ganzen Zahlen und schneide von der somit erhaltenen Summe so viele Stellen von rechts nach links durch ein Decimalkomma ab, als der Decimalbruch Stellen hat, welche von den zu addierenden Decimalbrüchen die grösste Anzahl von Decimalen enthält.“

(Siehe den Teil der Encyklopädie, welcher über die Decimalbrüche handelt.)

also nach Gleichung d):

$$e) \dots 1 \text{ hm} = 100 \text{ m}$$

ist.

Berücksichtigt man das durch die Gleichungen a) bis e) Gesagte bei der Gleichung 1), so kann man für dieselbe schreiben:

$$2) \dots x = 5 \cdot 100 \text{ m} + 14 \cdot 10 \text{ m} + 3 \text{ m} + 7 \cdot 0,1 \text{ m} + 9 \cdot 0,01 \text{ m} + 0,001 \text{ m}$$

führt man die angedeuteten Multiplikationen und Additionen nach den Erkl. 208 bis 210 aus, so erhält man für die in Meter ausgedrückte Länge x der gegebenen Strecke:

$$A) \dots x = 643,791 \text{ m}$$

Aufgabe 3. Die Entfernung zweier Punkte sei:

$$20 \text{ km } 5 \text{ Dm } 7 \text{ cm } 4 \text{ mm}$$

man drücke diese Entfernung in Kilometer aus.

Auflösung. Bezeichnet man die in km ausgedrückte Entfernung der beiden gedachten Punkte mit x , so ist gemäss der Aufgabe und nach der Erkl. 203:

$$1) \dots x = 20 \text{ km} + 5 \text{ Dm} + 7 \text{ cm} + 4 \text{ mm}$$

Um nun die Entfernung der beiden Punkte in km auszudrücken, berücksichtige man, dass nach dem in der Erkl. 109 aufgestellten Schema:

$$a) \dots 1 \text{ Dm} = 0,01 \text{ km}$$

dass ferner:

$$1 \text{ cm} = 0,001 \text{ Dm}$$

also nach Gleichung a) und nach der Erkl. 209:

$$b) \dots 1 \text{ cm} = 0,00001 \text{ km}$$

und dass schliesslich:

$$1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm}$$

also nach Gleichung b) und nach der Erkl. 209:

$$c) \dots 1 \text{ mm} = 0,000001 \text{ km}$$

ist.

Berücksichtigt man das in den Gleichungen a) bis c) Gesagte in Gleich. 1), so geht diese Gleichung über in:

$$2) \dots x = 20 \text{ km} + 5 \cdot 0,01 \text{ km} + 7 \cdot 0,00001 \text{ km} + 4 \cdot 0,000001 \text{ km}$$

Führt man die angedeuteten Multiplikationen und Additionen aus, so erhält man nach der Erkl. 211:

$$A) \dots x = 20,050074 \text{ km}$$

Erkl. 211. Führt man die in nebenstehender Gleichung 2) angedeuteten Multiplikationen und Additionen nach den Erkl. 209 und 210 aus, so erhält man:

$$x = 20 \text{ km} + 0,05 \text{ km} + 0,00007 \text{ km} + 0,000004 \text{ km}$$

oder:

$$\begin{array}{r} x = 20 \\ + 0,05 \\ + 0,00007 \\ + 0,000004 \\ \hline \text{oder} = 20,050074 \text{ km} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} x = 20 \\ + 0,05 \\ + 0,00007 \\ + 0,000004 \\ \hline \end{array}} \right\} \text{ km}$$

Aufgabe 4. Eine Strecke habe eine Dimension von

356017,039 m

man drücke diese Längendimension so weit als möglich durch ihre Decimal-einheiten aus.

Erkl. 212. Das metrische Masssystem hat infolge seiner Decimaleinteilung die Eigenthümlichkeit, dass man eine gegebene Dimension nur mit 10 zu multiplizieren, bezw. zu dividieren hat, um eine Dimension zu erhalten, die sich auf die nächst niedere, bezw. nächst höhere metrische Masseinheit bezieht.

Auflösung. Multipliziert man die gegebene Dimension:

356017,039 m

mit 10, so erhält man nach der Erkl. 212:

3560170,39 dm

multipliziert man abermals mit 10, so erhält man:

35601703,9 cm

multipliziert man abermals mit 10, so erhält man:

356017039 mm

oder:

356017030 mm + 9 mm

Dividiert man die erste Dimension durch 10, so erhält man nach der Erkl. 212:

35601703 cm + 9 mm

oder:

35601700 cm + 3 cm + 9 mm

Dividiert man abermals die erste Dimension durch 10, so erhält man:

3560170 dm + 3 cm + 9 mm

Dividiert man abermals die erste Dimension durch 10, so erhält man:

356017 m + 3 cm + 9 mm

oder:

356010 m + 7 m + 3 cm + 9 mm

Dividiert man abermals die erste Dimension durch 10, so erhält man:

35601 Dm + 7 m + 3 cm + 9 mm

oder:

35600 Dm + 1 Dm + 7 m + 3 cm + 9 mm

Dividiert man abermals die erste Dimension durch 10, so erhält man:

3560 hm + 1 Dm + 7 m + 3 cm + 9 mm

Dividiert man abermals die erste Dimension durch 10, so erhält man:

356 km + 1 Dm + 7 m + 3 cm + 9 mm

oder:

350 km + 6 km + 1 Dm + 7 m + 3 cm + 9 mm

Dividiert man abermals die erste Dimension durch 10, so erhält man schliesslich:

35 Mm + 6 km + 1 Dm + 7 m + 3 cm + 9 mm

mithin ist nach der Erkl. 203:

356017,039 m = 35 Mm 6 km 1 Dm 7 m 3 cm 9 mm

Aufgabe 5. Die Längendimension einer Strecke betrage:

70,523014 km

welches ist die Länge dieser Strecke in Decimaleinheiten ausgedrückt?

Auflösung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 4.

Aufgabe 6. Zwei Punkte seien:

21006843 mm

von einander entfernt; man soll diese Entfernung durch ihre Decimaleinheiten ausdrücken.

Auflösung. Die Auflösung ist analog der Auflösung zur Aufgabe 4.

Aufgabe 7. Eine Entfernung beträgt:

708354,19 dm

wie gross ist das 43,097fache dieser Entfernung, in geographische Meilen ausgedrückt?

Auflösung. Das 43,097fache der Entfernung von 708354,19 dm ist:

$$= 43,097 \cdot 708354,19 \text{ dm}$$

oder:

$$= 43,097 \cdot 70835,419 \text{ m}$$

da nun nach der Erkl. 106:

$$7500 \text{ m} = 1 \text{ geogr. Meile}$$

also:

$$1 \text{ m} = \frac{1}{7500} \text{ geogr. Meile}$$

ist, so erhält man für das gesuchte 43,097fache der gegebenen Entfernung von 708354,19 dm, wenn dasselbe in geogr. Meilen ausgedrückt und durch x bezeichnet wird:

$$x = \frac{43,097 \cdot 70835,419}{7500} \text{ geogr. Meilen}$$

hieraus ergibt sich nach der Erkl. 213:

$$x = \frac{3052794,052643}{7500}$$

oder nach der Erkl. 214:

$$x = 407,0392 \text{ geogr. Meilen (abgerundet.)}$$

Erkl. 213. Nach der Erkl. 215 ist:

$$43,097 \cdot 70835,419 = 70835,419 \cdot 43,097$$

$$\begin{array}{r} 495\ 847\ 933 \\ 6375\ 18771 \\ 212506\ 2570 \\ 2833416\ 76 \\ \hline 3052794,052643 \end{array}$$

Erkl. 214. Nach der Erkl. 216 ist:

$$\frac{3052794,052643}{7500}$$

oder:

$$\frac{30527,94052643}{75} = 407,0392 \dots$$

(siehe nachstehende Division)

$$75 \overline{) 30527,94052643} \mid 407,0392 \dots$$

300

52

0

527

525

29

0

294

225

690

675

155

150

5 u. s. f.

Erkl. 215. Eine Regel aus der Decimalbruchrechnung heisst:

„Zwei Decimalbrüche werden miteinander multipliziert, indem man dieselben ohne

Rücksicht ihrer Decimalkomma, also wie ganze Zahlen multipliziert, von dem erhaltenen Produkt so viele Stellen von rechts nach links durch ein Decimalkomma abtrennt, als jene beiden Decimalbrüche zusammen Decimalstellen enthalten; nötigenfalls sind dem erhaltenen Produkt Nullen vorzusetzen.“

(Siehe den Teil der Encyklopädie, welcher über die Decimalbruchrechnung handelt.)

Erkl. 216. Eine Regel aus der Decimalbruchrechnung heisst:

„Ein Decimalbruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man ohne Rücksicht auf das Decimalkomma dividiert, wie mit ganzen Zahlen, im Quotienten aber nach der Ziffer ein Decimalkomma setzt, welche erhalten wird, wenn bei der Division die letzte Ziffer vor dem Komma des Decimalbruchs heruntergeholt ist.“

Soll ein Decimalbruch durch einen andern Decimalbruch dividiert werden, so multipliziere man, wie in der Erkl. 205 angegeben wurde, jeden der beiden Decimalbrüche, je nachdem, mit einer der Zahlen 10, 100, 1000, 10000 etc., mit einer sog. Potenz von 10, damit der Decimalbruch, mit welchem dividiert werden soll, zu einer ganzen Zahl wird; dann kann man im weiteren verfahren, wie in vorstehender Regel gesagt wurde.

Ist die ganze Zahl, mit welcher ein Decimalbruch dividiert werden soll, eine solche, deren letzte Stellen Nullen sind, so kann man diese Zahl (wie in der Erkl. 214 gezeigt) kürzen, indem man diese Nullen einfach weglässt, dann aber auch in dem zu dividierenden Decimalbruch das Decimalkomma um so viele Stellen weiter nach links rückt, als die Anzahl jener Nullen betrug, welche weggelassen wurden.

Man beachte auch, dass man einem Decimalbruch beliebig viele Nullen anhängen kann, ohne damit dessen Wert zu verändern.

(Siehe den Teil der Encyklopädie, welcher über die Decimalbruchrechnung handelt.)

Aufgabe 8. Eine Strasse hat eine Länge von:

218,945 m

wie gross ist der 1,20ste Teil der Strassenlänge?

Auflösung. Bezeichnet man den gesuchten Teil mit x , so ist:

$$x = \frac{218,945}{1,20} \text{ m}$$

oder nach der Erkl. 217:

A) $x = 182,454 \text{ m}$ (abgerundet).

Erkl. 217. Nach der Erkl. 215 ist:

$$\frac{218,945}{1,20} = \frac{21894,5}{120}$$

oder:

$$\frac{2189,45}{12} = 182,454 \text{ abgerundet.}$$

(Siehe nachstehende Division)

$$12 \overline{) 2189,45 | 182,454}$$

$$\underline{12}$$

$$98$$

$$\underline{96}$$

$$29$$

$$\underline{24}$$

$$54$$

$$\underline{48}$$

$$65$$

$$\underline{60}$$

$$50$$

$$48 \text{ u. s. w.}$$

Aufgabe 9. Man weiss, dass die Summe zweier Entfernungen x und y , von welchen die Entfernung x dreimal so gross ist, als die Entfernung y :

542 Dm 1 m 47 cm und 2 mm

beträgt; wie gross muss hiernach jede der Entfernungen x und y sein?

Auflösung. Gemäss der Aufgabe ist:

$$1) \dots x = 3 \cdot y$$

und

$$2) \dots x + y = 542 \text{ Dm } 1 \text{ m } 47 \text{ c } 2 \text{ mm}$$

Setzt man den Wert von x aus Gleichung 1) in Gleichung 2), so erhält man:

$$3) \dots 3y + y = 542 \text{ Dm } 1 \text{ m } 47 \text{ cm } 2 \text{ mm}$$

oder:

$$4) \dots 4y = 542,1472 \text{ Dm}$$

und hieraus ergibt sich:

$$y = \frac{542,1472}{4} \text{ Dm}$$

oder, die angedeutete Division ausgeführt:

$$y = 135,5368 \text{ Dm}$$

oder:

$$y = 1355,368 \text{ m}$$

Die eine Entfernung y ist also:

$$A) \dots y = 1355,368 \text{ m}$$

die andere Entfernung x ist:

$$x = 3 \cdot 1355,368 \text{ m}$$

oder:

$$B) \dots x = 4066,104 \text{ m}$$

Aufgabe 10. Von den drei Strecken a , b und c sei:

$$a = 3 \text{ dm } 1 \text{ cm } 6 \text{ mm}$$

$$b = 0,235 \text{ m}$$

$$c = 0,000247 \text{ km}$$

lang; wie gross ist diejenige Strecke, welche die Summe dieser drei Strecken bildet?

Auflösung. Bezeichnet man durch x die Summe der drei Strecken a , b und c , so ist:

$$x = a + b + c$$

oder gemäss der Aufgabe und nach der Erkl. 203:

$$1) \dots x = 3 \text{ dm} + 1 \text{ cm} + 6 \text{ mm} + 0,235 \text{ m} + 0,000247 \text{ km}$$

drückt man nun die Dimensionen:

$$0,235 \text{ m}$$

und

$$0,000247 \text{ km}$$

der Strecken b und c durch ihre Decimal-einheiten, soweit dies möglich, aus, so erhält man, analog wie in Auflösung der Aufgabe 4 gezeigt wurde:

$$\alpha) \dots b = 0,235 \text{ m}$$

oder:

$$= 2 \text{ dm} + 3 \text{ cm} + 5 \text{ mm}$$

und

$$\beta) \dots c = 0,000247 \text{ km}$$

oder:

$$= 2 \text{ dm} + 4 \text{ cm} + 7 \text{ mm}$$

Rücksichtlich der Gleichungen $\alpha)$ und $\beta)$ erhält man aus Gleichung 1):

$$2) \dots x = 3 \text{ dm} + 1 \text{ cm} + 6 \text{ mm} + 2 \text{ dm} + 3 \text{ cm} + 5 \text{ mm} + 2 \text{ dm} + 4 \text{ cm} + 7 \text{ mm}$$

addiert man die gleichnamigen Posten in 2), so erhält man für die durch x ausgedrückte Summe der gegebenen drei Strecken a , b und c :

$$x = 7 \text{ dm } 8 \text{ cm } 18 \text{ mm}$$

oder auch, da $18 \text{ mm} = 1 \text{ cm} + 8 \text{ mm}$ ist:

$$A) \dots x = 7 \text{ dm } 9 \text{ cm } 8 \text{ mm}$$

Aufgabe 11. Wenn man von einem Weg, dessen Länge:

$$4301 \text{ m}$$

beträgt, 3570242 mm zurückgelegt hat, welches ist dann der Rest des Wegs?

Erkl. 218. Führt man die in nebenstehender Gleichung 2) angedeutete Subtraktion nach der Erkl. 219 aus, so erhält man:

$$\begin{array}{r} x = 4301,000 \\ - 3570,242 \\ \hline \text{oder } = 730,758 \text{ m} \end{array} \text{ m}$$

Erkl. 219. Eine Regel über die Subtraktion von Decimalbrüchen heisst:

„Man schreibe die zu subtrahierenden Decimalbrüche nach ihrem Stellenwert genau unter einander, so dass auch die Decimalkomma genau unter einander stehen, subtrahiere dann wie bei ganzen Zahlen und schneide von der somit erhaltenen Differenz so viele Stellen von rechts nach links durch ein Decimalkomma ab, als der Decimalbruch Stellen hat, welcher von den zu subtrahierenden Decimalbrüchen die grösste Anzahl von Decimalen enthält.“

(Siehe den Teil der Encyklopädie, welcher über die Decimalbrüche handelt.)

Auflösung. Bezeichnet man durch x den Rest des Wegs, so ist gemäss der Aufgabe:

$$1) \dots x = 4301 \text{ m} - 3570242 \text{ mm}$$

Drückt man die Länge des zurückgelegten Wegs von 3570242 mm in m aus, so erhält man nach der Erkl. 212:

$$2) \dots x = 4301 \text{ m} - 3570,242 \text{ m}$$

oder nach der Erkl. 218:

$$A) \dots x = 730,758 \text{ m}$$

Aufgabe 12. Der Abstand zweier Punkte beträgt:

0,4706 km

der Abstand zweier anderer Punkte ist:

2 hm 3 Dm 5 m 3 dm

das Wievielfache des letzten Abstandes ist der erste Abstand?

Auflösung. Das gesuchte Vielfache x erhält man, indem man mit der auf eine Masseinheit sich beziehenden Masszahl, durch welche der Abstand von 2 hm 3 Dm 5 m 3 dm ausgedrückt ist, in die auf dieselbe Masseinheit sich beziehende Masszahl, durch welche der Abstand von 0,4706 km ausgedrückt ist, dividiert.

Nach den Erkl. 212 und 109 ist z. B.:

$$0,4706 \text{ km} = 4706 \text{ dm}$$

ferner ist:

$$2 \text{ hm } 3 \text{ Dm } 5 \text{ m } 3 \text{ dm} = 2353 \text{ dm}$$

Man hat also nach Vorstehendem:

$$x = \frac{4706}{2353}$$

und hieraus ergibt sich, wenn man die angedeutete Division ausführt, für das gesuchte Vielfache x :

$$x = 2$$

C) Konstruktionsaufgaben.

Aufgabe 13. Man soll eine beliebige Gerade konstruieren.

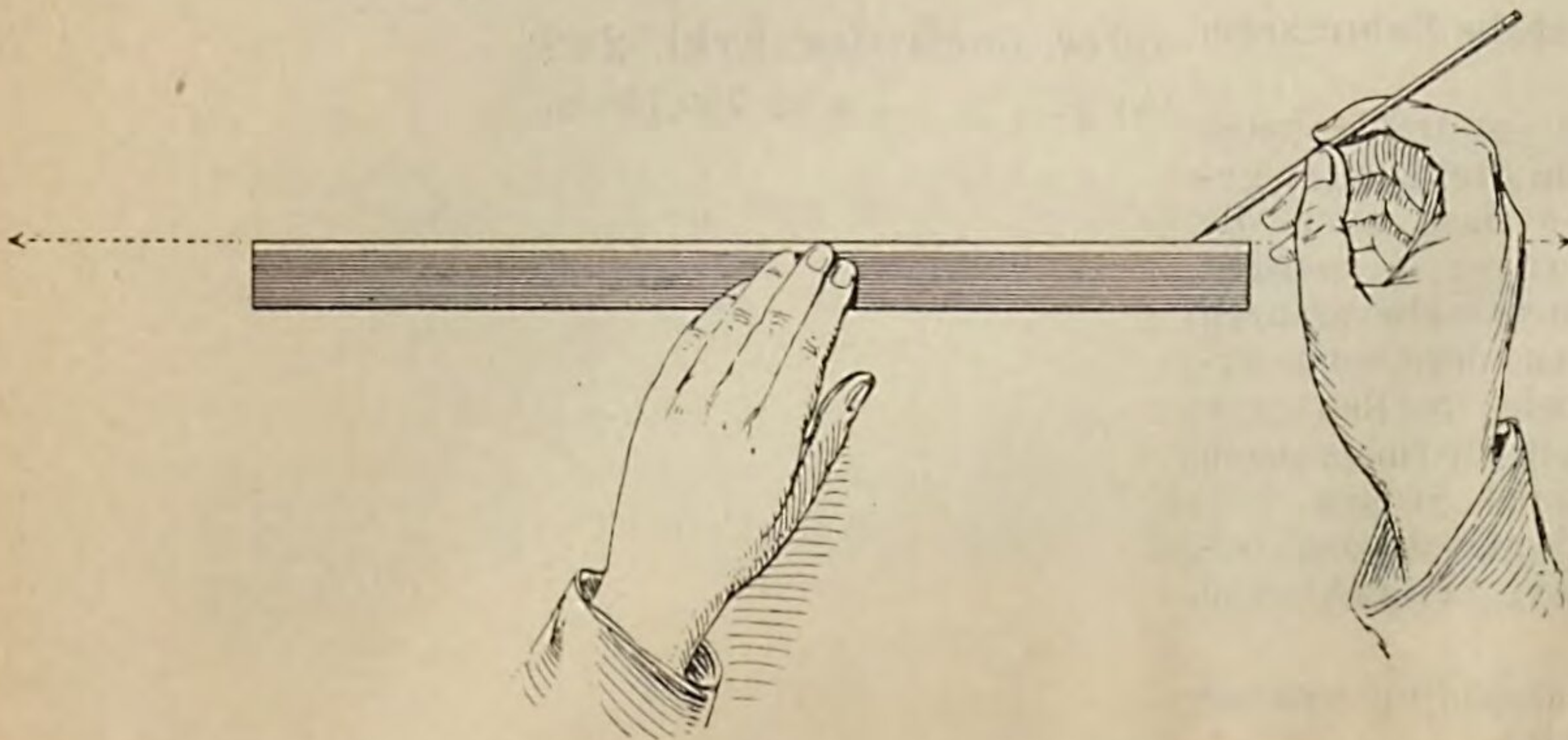
Erkl. 220. In einer Ebene kann man unendlich viele Gerade zeichnen (siehe Fig. 49 und Erkl. 131). Die Aufgabe 13 lässt hiernach unendlich viele Lösungen zu.

Erkl. 221. Solche Aufgaben, wie z. B. die Aufgaben 13 bis 19, welche mittels eines Lineals, bzw. mittels eines Zirkels, ohne weiteres gelöst werden, nennt man auch „Postulate“.

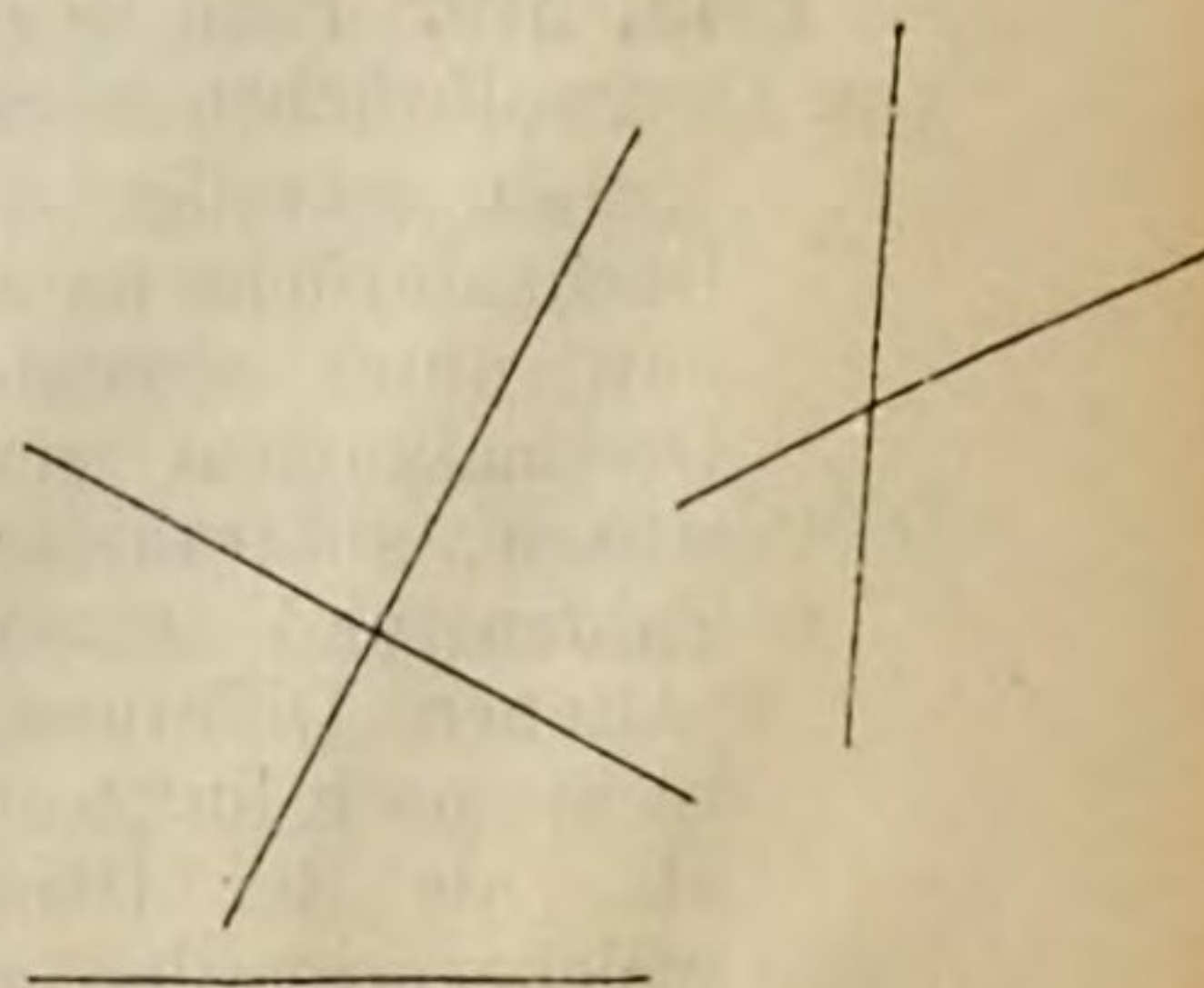
Das Wort Postulat stammt aus dem Lateinischen; man versteht darunter einen Satz, welcher vorschreibt, dass etwas Bestimmtes gethan werden soll.

Auflösung. Man lege, siehe Figur 48, ein Lineal auf ein glatt aufliegendes Zeichenpapier (dessen Oberfläche eine Ebene darstellt, siehe Erkl. 117) fest auf und ziehe, wie in Antwort auf Frage 2 angedeutet, längs desselben mittels einer fein gespitzten Bleifeder oder mittels einer Reissfeder oder dergleichen, stetig einen möglichst feinen Strich; ein solcher Strich stellt eine Gerade, bzw. einen Teil einer Geraden symbolisch dar (siehe Erkl. 220 und 221).

Figur 48.

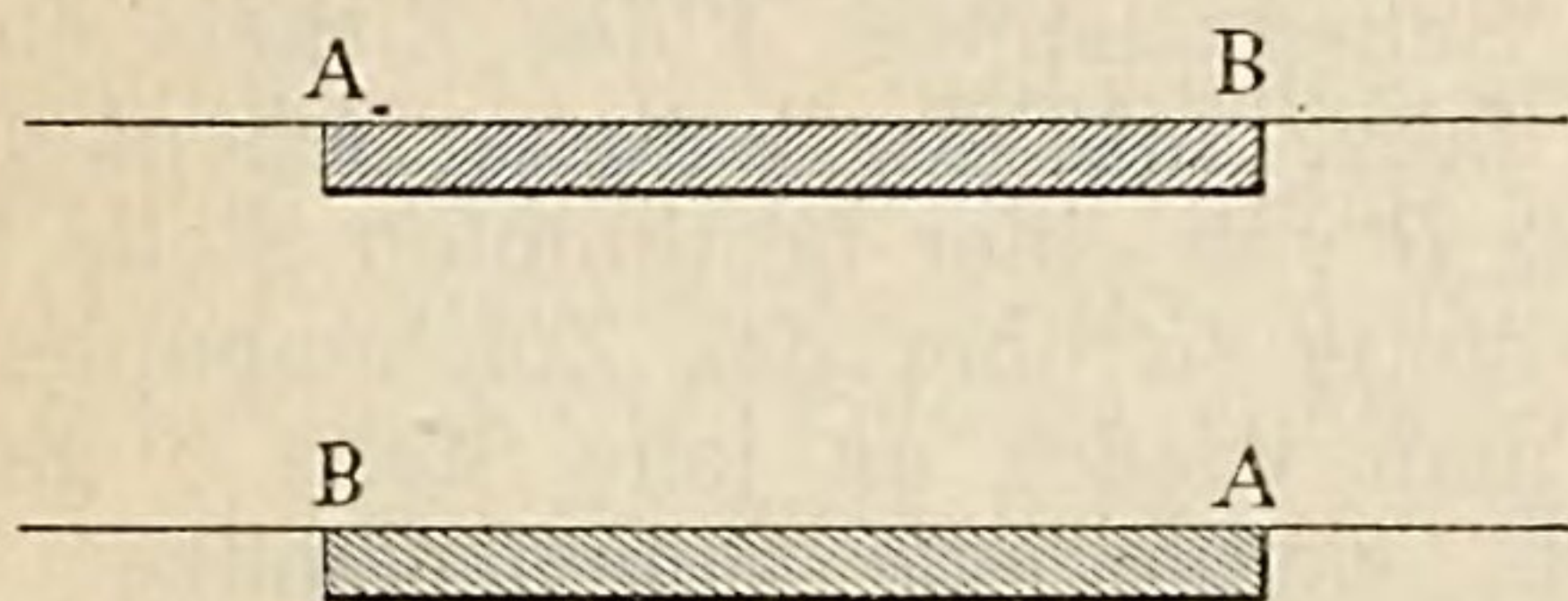


Figur 49.



Aufgabe 14. Man soll ein Lineal prüfen, untersuchen, ob dasselbe zum Zeichnen von Geraden geeignet ist.

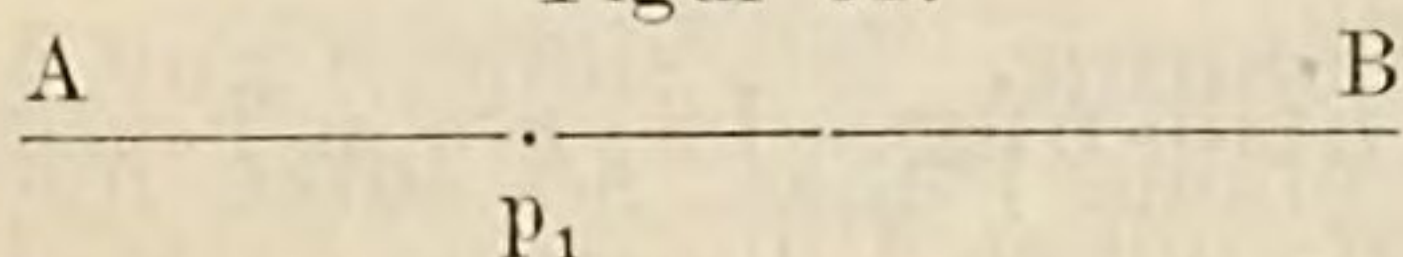
Figur 50.



Auflösung. Man lege, siehe Figur 50, das zu prüfende Lineal auf das Zeichenpapier fest auf und ziehe längs einer bestimmten Stelle desselben, z. B. längs AB , einen Strich; alsdann drehe man das Lineal um, lege jene Stelle an den gezogenen Strich an und ziehe längs derselben Stelle, also jetzt längs BA , einen zweiten Strich; decken sich die beiden Striche, so ist das Lineal an jener Stelle gerade und es erfüllt an jener Stelle seinen Zweck.

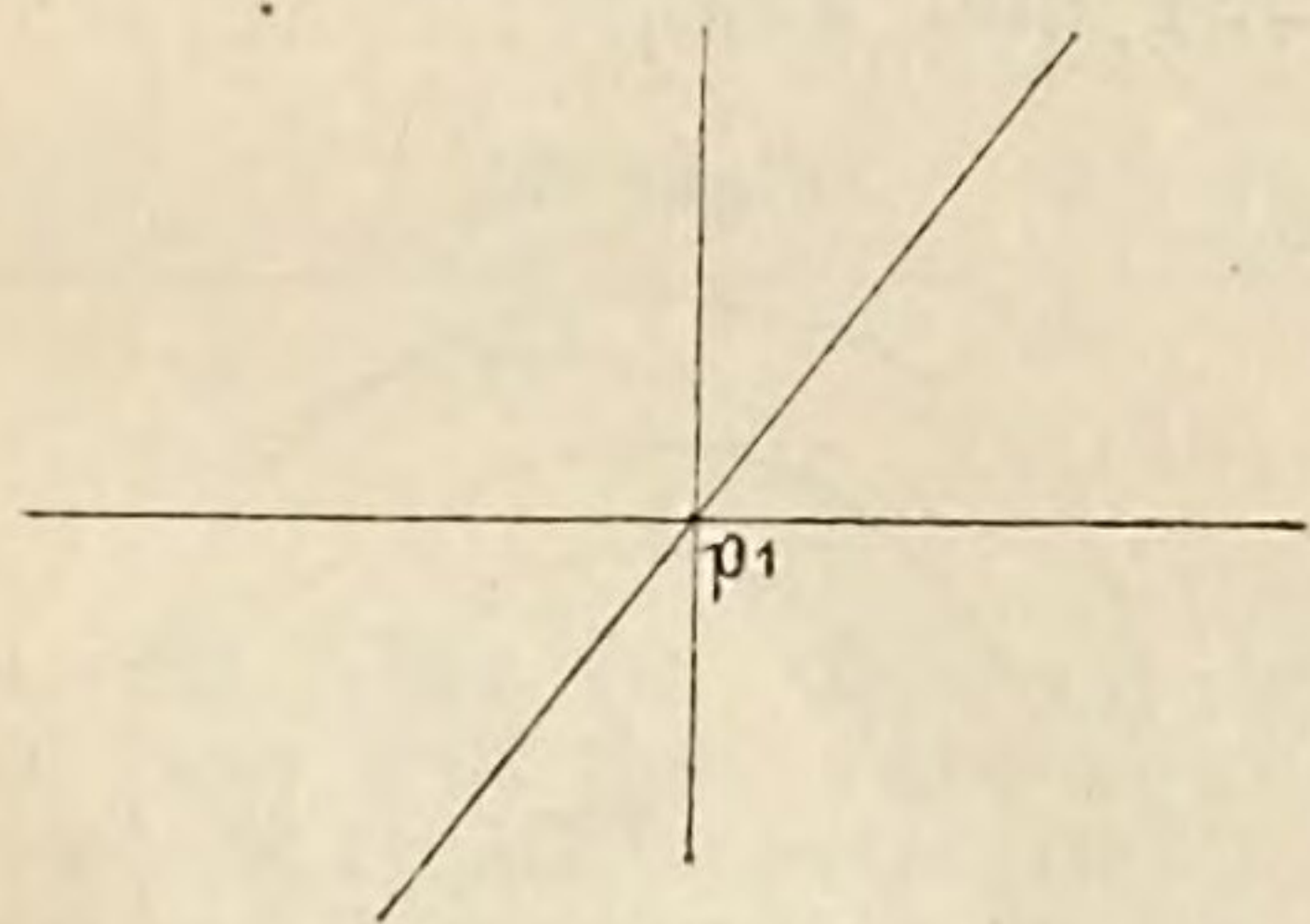
Aufgabe 15. Man soll eine Gerade zeichnen, welche durch einen gegebenen Punkt geht.

Figur 51.



Erkl. 222. Durch einen gegebenen Punkt p_1 einer Ebene kann man in der Ebene unzählig viele Gerade gezogen denken, siehe Figur 52. Die Aufgabe 15 lässt hiernach unzählig viele Lösungen zu.

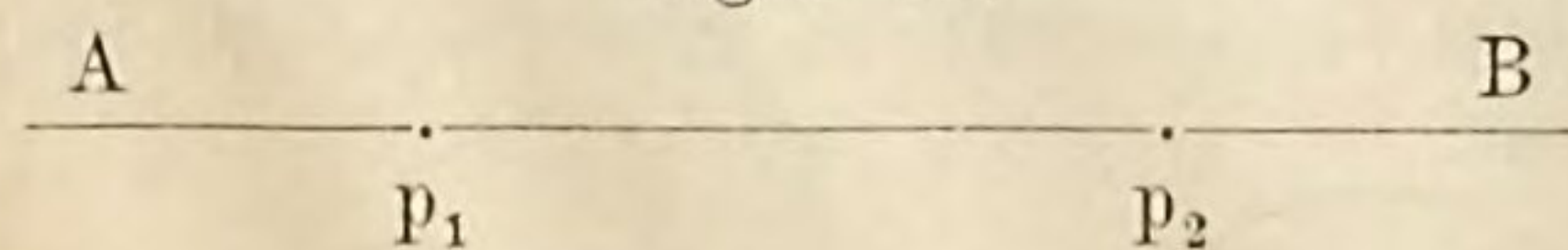
Figur 52.



Auflösung. Ist, siehe Figur 51, p_1 der gegebene Punkt, so lege man ein Lineal so auf das Zeichenpapier fest auf, dass man beim Ziehen eines feinen Strichs AB längs einer bestimmten Stelle des Lineals genau durch den gegebenen Punkt p_1 kommt; dieser Strich AB stellt eine Gerade dar, welche durch den gegebenen Punkt p_1 geht (siehe Erkl. 222).

Aufgabe 16. Man soll eine Gerade konstruieren, welche durch zwei gegebene Punkte geht.

Figur 53.

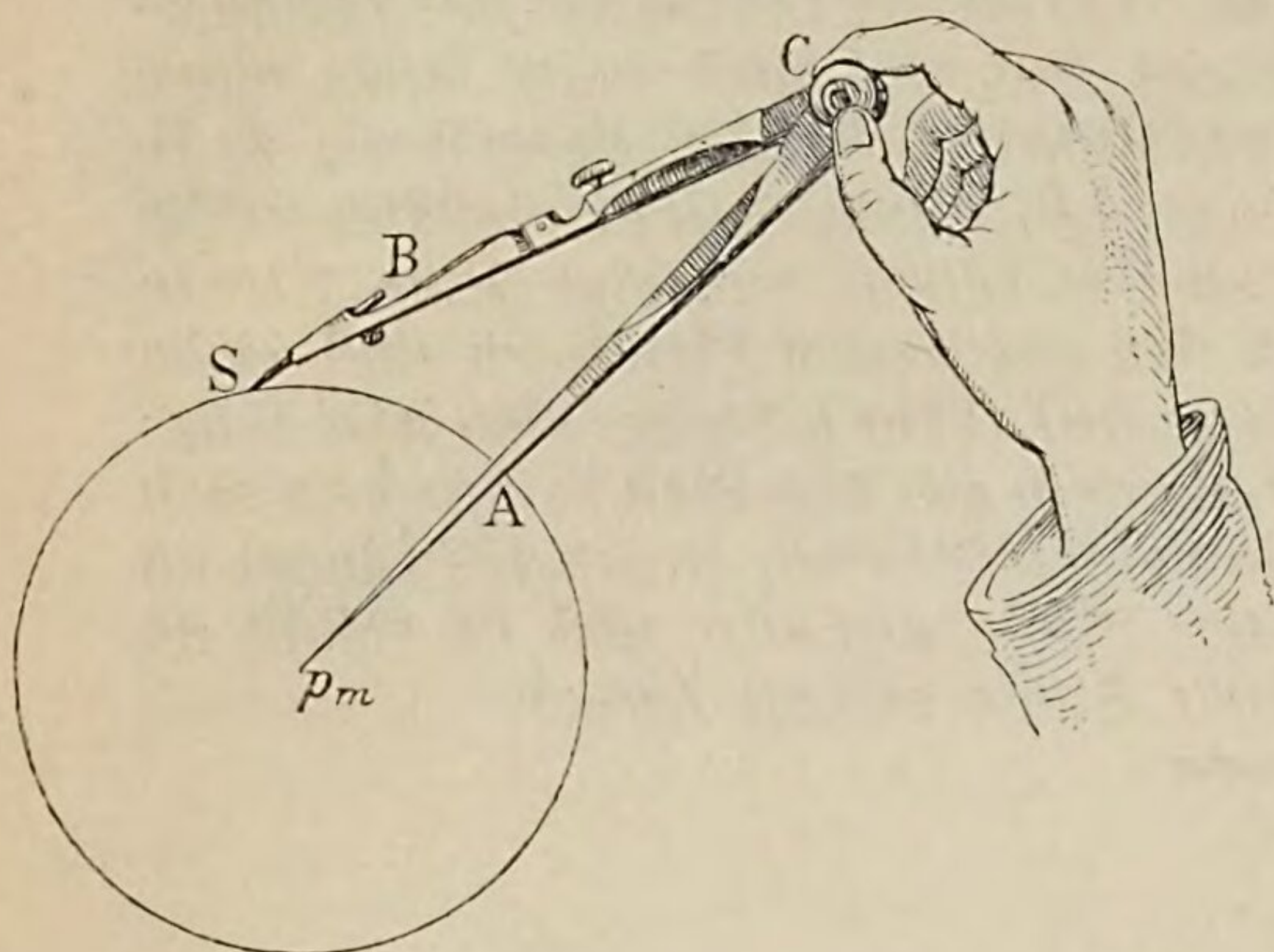


Erkl. 223. Durch zwei gegebene Punkte kann man nur eine einzige Gerade ziehen (siehe Lehrsatz 4); die Aufgabe lässt hiernach nur eine einzige Lösung zu.

Auflösung. Sind, siehe Figur 53, p_1 und p_2 die zwei gegebenen Punkte, so lege man ein Lineal so auf das Zeichenpapier fest auf, dass man beim Ziehen eines feinen Strichs AB längs einer bestimmten Stelle desselben genau durch die gegebenen Punkte p_1 und p_2 kommt; dieser Strich AB stellt eine Gerade dar, welche durch die beiden gegebenen Punkte p_1 und p_2 geht (siehe Erkl. 223).

Aufgabe 17. Man soll eine beliebige Kreislinie konstruieren.

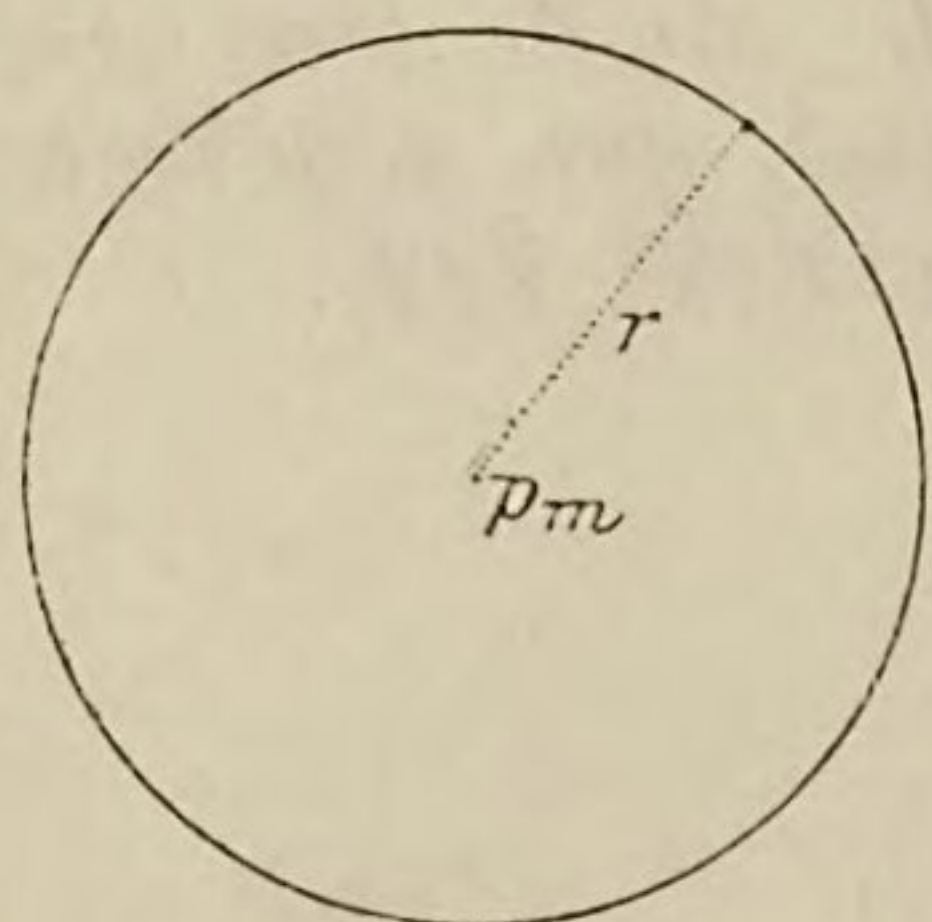
Figur 54.



Auflösung. Man nehme einen Zirkel, öffne dessen Schenkel beliebig, setze, siehe Figur 54, in einen beliebigen Punkt p_m des Zeichenpapiers die eine Schenkelspitze A des Zirkels ein und fahre mit der andern Schenkelspitze B von einer bestimmten Stelle S aus stetig so über das Zeichenpapier, bis man wieder an jene Stelle S gelangt, wobei jene Schenkelspitze A fest in dem beliebig gewählten Punkt p_m bleiben muss (siehe die Erkl. 154 und 155).

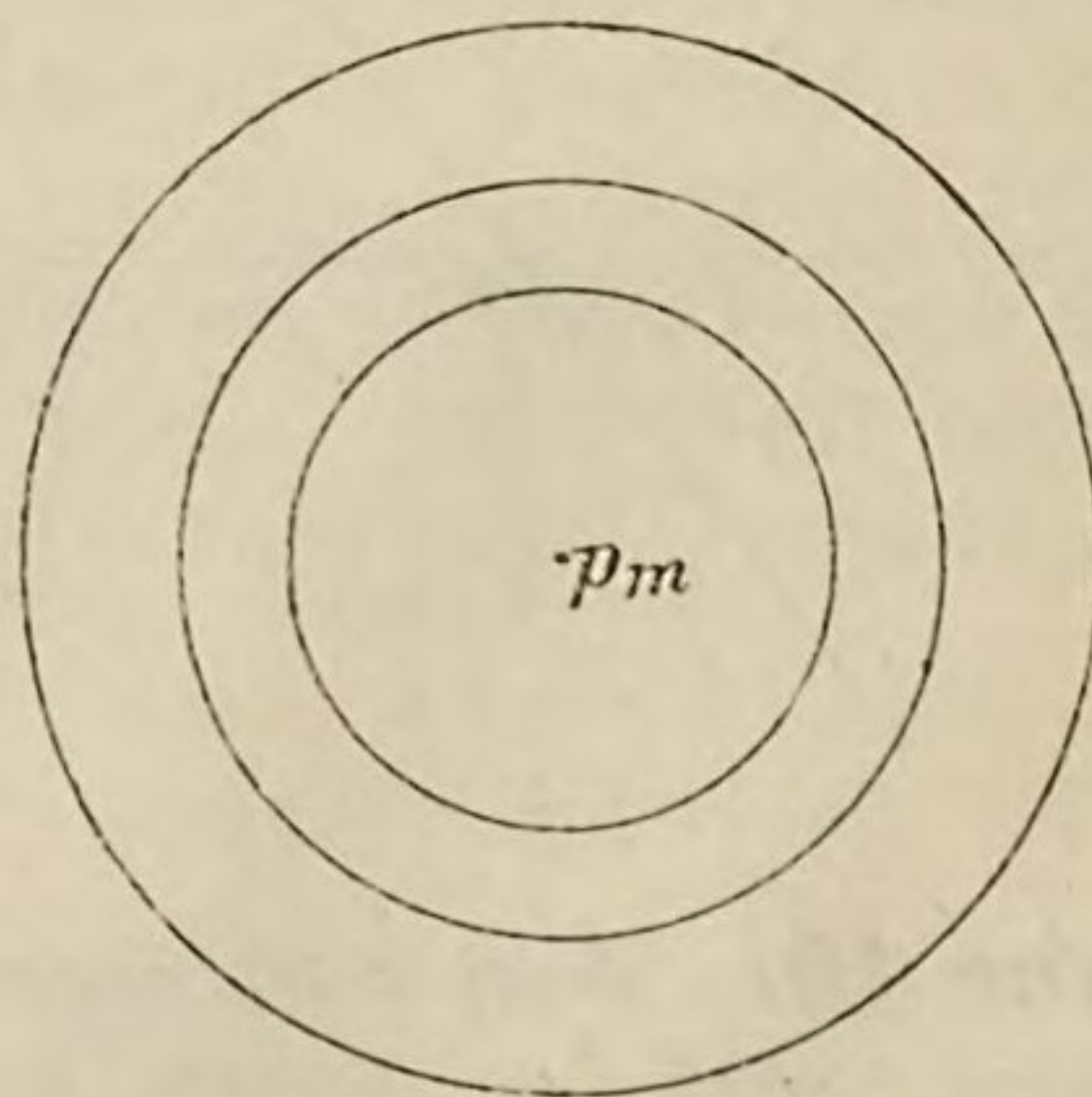
Aufgabe 18. Man soll in einer Ebene um einen gegebenen Punkt eine Kreislinie konstruieren.

Figur 55.



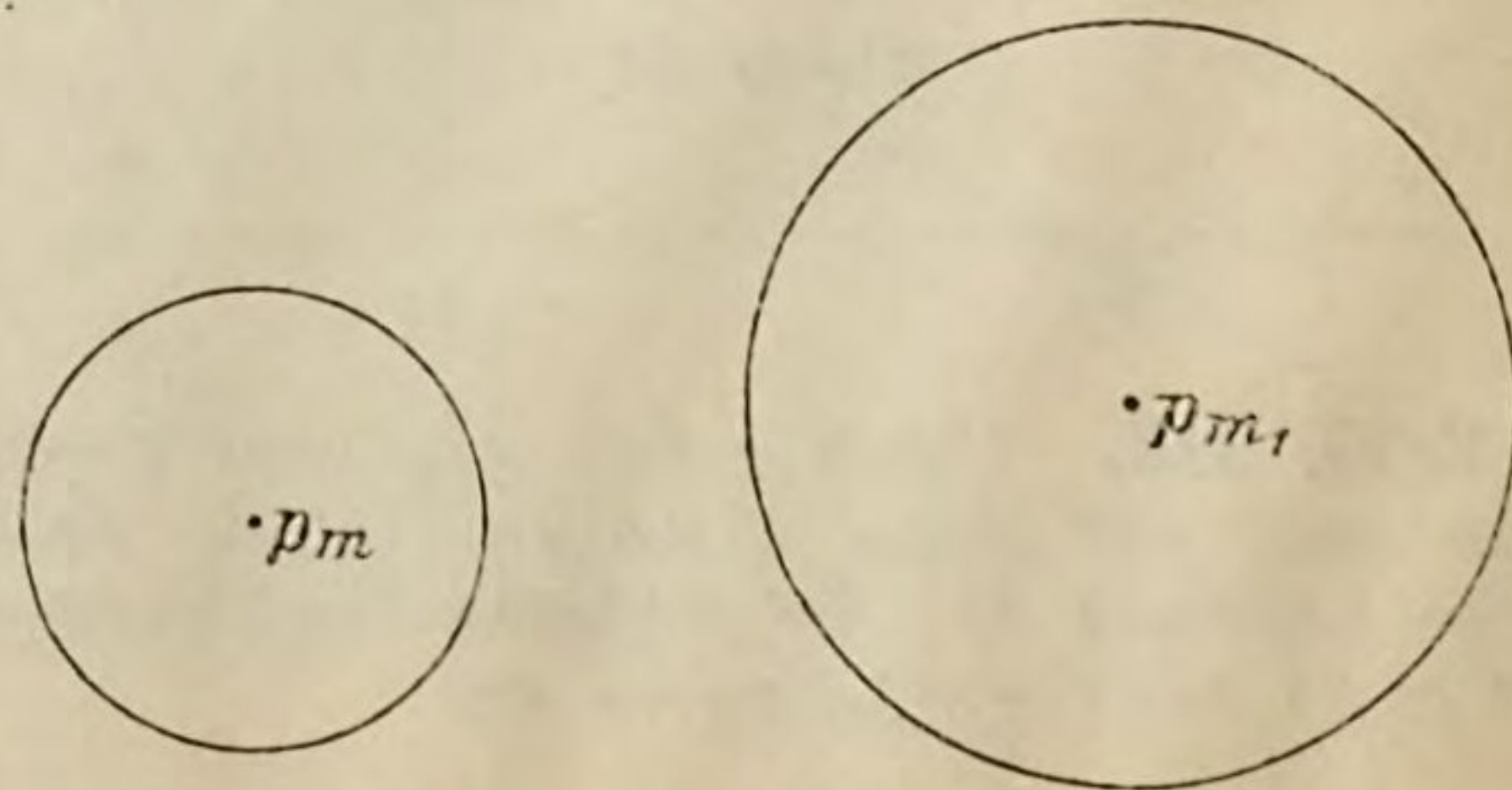
Auflösung. Ist, siehe Figur 55, p_m der gegebene Punkt, so setze man die eine Zirkelspitze in diesen Punkt p_m ein und ziehe oder schlage, wie man sich vielfach ausdrückt, mit beliebiger Zirkelöffnung um jenen Punkt p_m eine Kreislinie, wie in der Auflösung der Aufgabe 17 gesagt ist (siehe die Erkl. 224 und 225).

Figur 56.



Erkl. 224. In einer Ebene kann man sich um einen gegebenen Punkt mit beliebiger Zirkelöffnung unzählig viele Kreislinien gezogen denken, wie z. B. die Figur 56 zeigt. Die Aufgabe 18 lässt hiernach unzählig viele Lösungen zu.

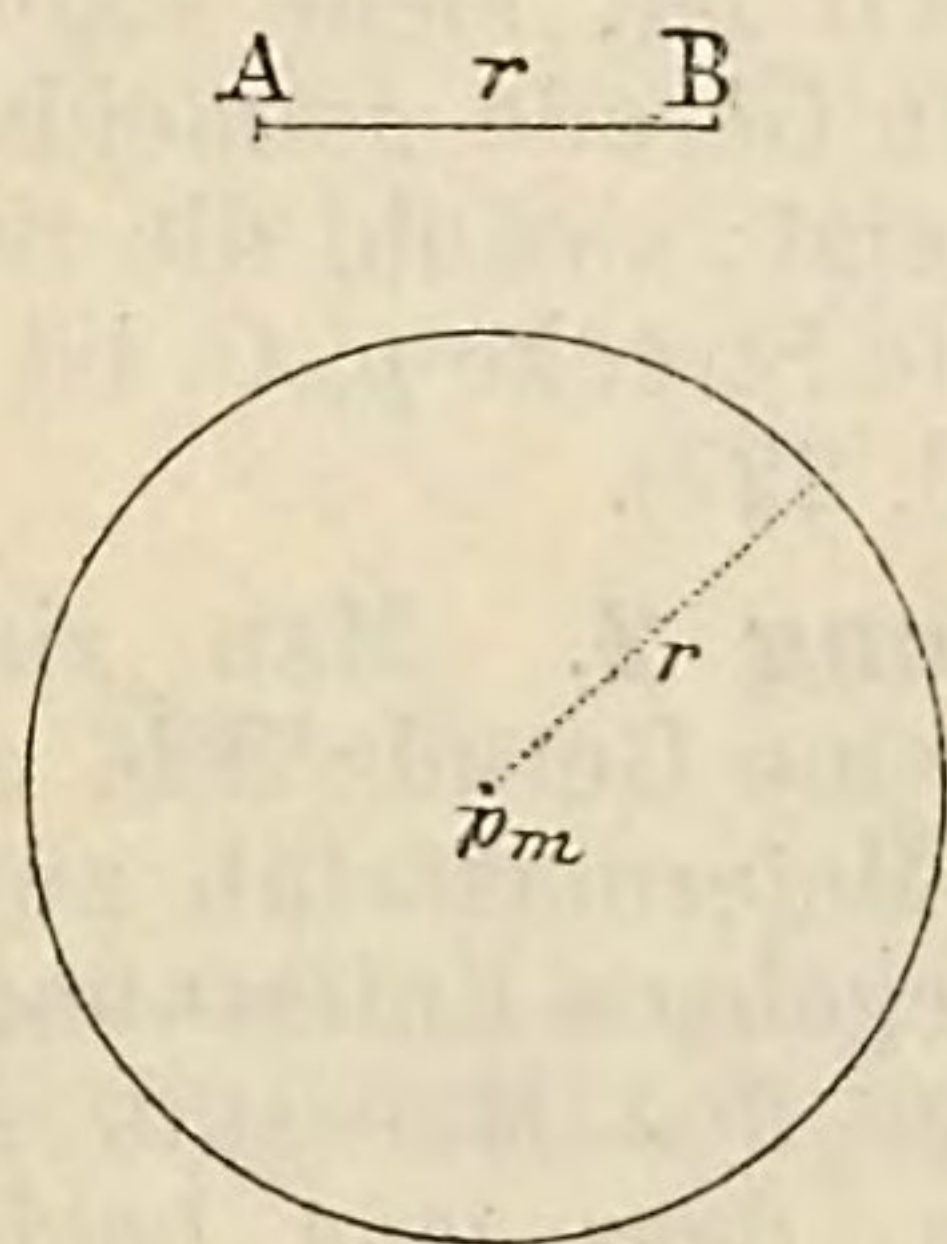
Figur 57.



Erkl. 225. Solche Kreislinien wie die durch Figur 56 dargestellten nennt man konzentrische Kreislinien, da sie einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben; im Gegensatz hierzu heißen solche Kreislinien, welche keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, exzentrische Kreislinien, wie z. B. die Kreislinien um p_m und p_{m_1} in Figur 57.

Aufgabe 19. Man soll um einen gegebenen Punkt und mit einer gegebenen Strecke als Radius eine Kreislinie konstruieren.

Figur 58.

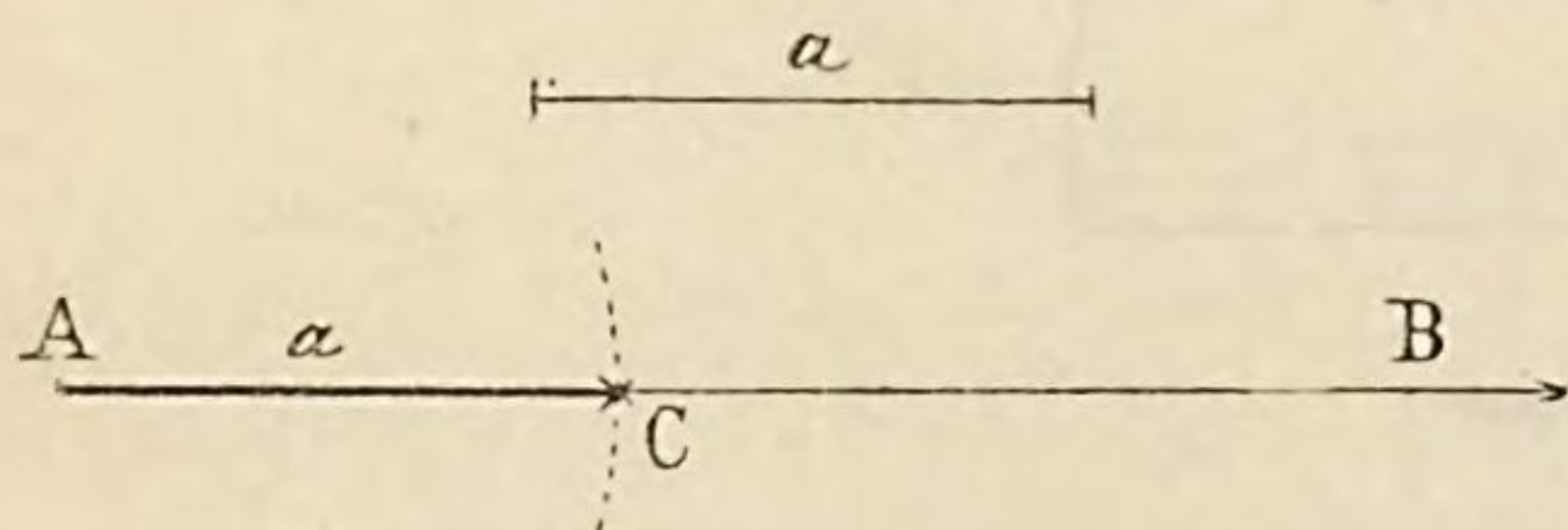


Auflösung. Ist, siehe Figur 58, p_m der gegebene Punkt und ist $AB (= r)$ die gegebene Strecke, so nehme man die gegebene Strecke r in den Zirkel, d. h. man setze die eine der Zirkelspitzen in den einen Endpunkt A , die andere Zirkelspitze in den andern Endpunkt B der Strecke r ein und beobachte, dass die somit erhaltene Zirkelöffnung sich nicht ändert; setze alsdann die eine Zirkelspitze in den gegebenen Punkt p_m ein und schlage mit der andern Zirkelspitze eine Kreislinie, wie in der Auflösung der Aufgabe 17 gesagt ist (siehe Erkl. 226).

Erkl. 226. Um einen gegebenen Punkt kann man mit gegebenem Radius nur eine einzige Kreislinie ziehen; die Aufgabe 19 lässt somit nur eine einzige Lösung zu.

Aufgabe 20. Man soll eine gegebene Strecke auf einen Strahl abtragen.

Figur 59.



Auflösung. Man beschreibe, siehe Figur 59, mit einem Radius, welcher gleich der gegebenen Strecke a ist, um den Anfangspunkt A des Strahls AB einen Kreisbogen, so dass er den Strahl schneidet, wie die Figur 59 zeigt. Da in Figur 59 hiernach die Strecke AC gleich der Strecke a ist, so sagt man, man habe die Strecke a auf den Strahl AB abgetragen (siehe Erkl. 227).

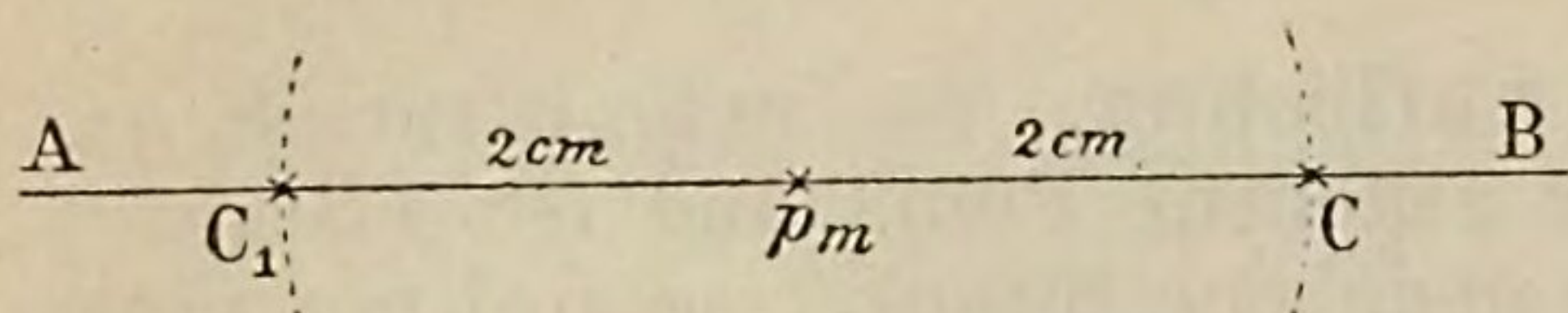
Erkl. 227. Bei der Auflösung der Aufgabe 20 kann man statt eines Zirkels auch einen Streifen Papier nehmen, der an einer Stelle gerade abgeschnitten ist, an dieser Stelle die Länge der Strecke a markieren, und diesen Papierstreifen an den Strahl so anlegen, dass der eine Endpunkt der auf ihm markierten Strecke a auf den Anfangspunkt des Strahls, der andere Endpunkt auf einen Punkt des Strahls zu liegen kommt.

Man kann auch einen Massstab benutzen, die Strecke a messen und dieses Mass auf den Strahl abtragen (siehe die Aufgaben 21 und 22).

Aufgabe 21. Man konstruiere eine Strecke x , welche 2 cm lang ist.

Auflösung 1. Man nehme einen Metermassstab, siehe Figur 35, merke sich auf demselben zwei Punkte, die jene gegebene Entfernung von 2 cm

Figur 60.



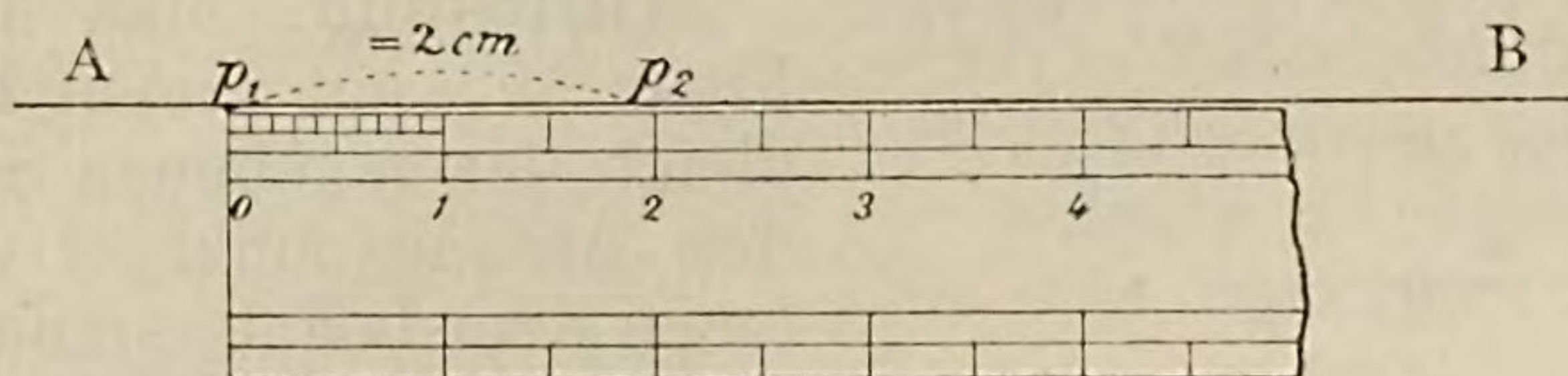
Erkl. 227a. Gesuchte Strecken werden gewöhnlich durch die letzten Buchstaben, wie x, y, z des Alphabets, gegebene Strecken hingegen durch die ersten Buchstaben a, b, c des Alphabets bezeichnet.

Erkl. 227b. Bei der Auflösung der Aufgabe 21 hat man in der Figur 60 zwei Strecken $p_m C$ und $p_m C_1$ erhalten, von welchen jede $= 2\text{ cm}$ lang ist. In Rücksicht darauf, dass die eine von dem Punkt p_m aus eine entgegengesetzte Richtung als die andere hat, bzw. auf entgegengesetzte Weise entstanden gedacht werden kann, sagt man, die Strecke $p_m C$ ist $+ 2\text{ cm}$, die Strecke $p_m C_1$ ist $- 2\text{ cm}$ lang, oder umgekehrt.

haben, stelle die Zirkelspitzen so, dass jede derselben auf einen jener Punkte zu stehen kommt; mit dieser Zirkelöffnung als Radius konstruiere man einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt p_m ein Punkt einer beliebig gezogenen Geraden AB ist, siehe Figur 60, und welcher die Gerade schneidet, wie die Figur 60 zeigt; sowohl die Strecke $p_m C$ als auch die Strecke $p_m C_1$ ist 2 cm lang (siehe Erkl. 227).

Auflösung 2. Man ziehe, siehe Figur 61, eine Gerade AB , merke sich an einem Metermassstab zwei Punkte, die jene gegebene Entfernung von 2 cm haben, lege den Massstab so an jene Gerade an, dass jene beiden Punkte auf die Gerade zu liegen kommen, und bezeichne die Stellen auf der Geraden, wo dies stattfindet. Diese beiden Punkte p_1 und p_2 bestimmen die gesuchte Strecke x .

Figur 61.



Aufgabe 22. Man konstruiere eine Strecke x , welche:

- a) $4,3\text{ cm}$
- b) 30 mm
- c) $0,4\text{ dm}$
- d) $0,34\text{ dm}$
- e) $0,05\text{ m}$
- f) $0,048\text{ m}$

lang ist.

Figur 62.

$4,3\text{ cm}$

Figur 63.

30 mm

Figur 64.

$0,4\text{ dm}$

Figur 65.

$0,34\text{ dm}$

Andeutung. Man beachte, dass:

- a) $4,3\text{ cm} = 4\text{ cm } 3\text{ mm}$
- b) $30\text{ mm} = 3\text{ cm}$
- c) $0,4\text{ dm} = 4\text{ cm}$
- d) $0,34\text{ dm} = 3,4\text{ cm}$ oder $= 3\text{ cm } 4\text{ mm}$
- e) $0,05\text{ m} = 0,5\text{ dm}$ oder $= 5\text{ cm}$
- f) $0,048\text{ m} = 0,48\text{ dm}$ oder $= 4,8\text{ cm}$
oder $= 4\text{ cm } 8\text{ mm}$

ist und verfähre, wie in Auflösung zur vorigen Aufgabe gesagt wurde. Die durch die Figuren 62 bis 67 dargestellten Strecken haben der Reihe nach die gegebenen Längen.

Figur 66.

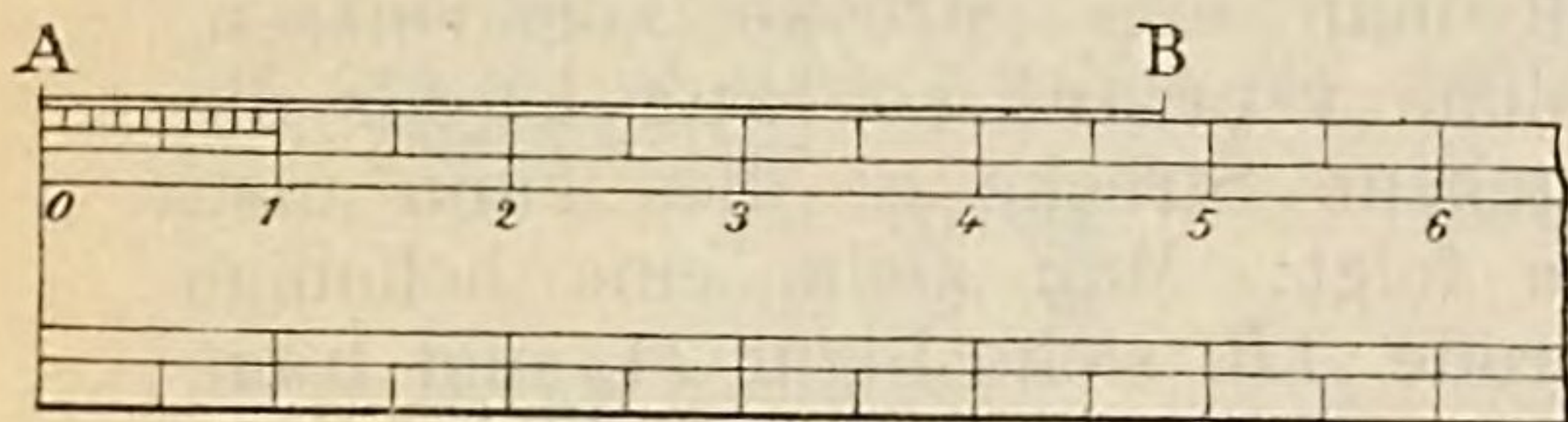
$0,05\text{ m}$

Figur 67.

$0,048\text{ m}$

Aufgabe 23. Man bestimme die Länge der durch die Figur 68 dargestellten Strecke AB mittels eines Metermassstabes.

Figur 68.

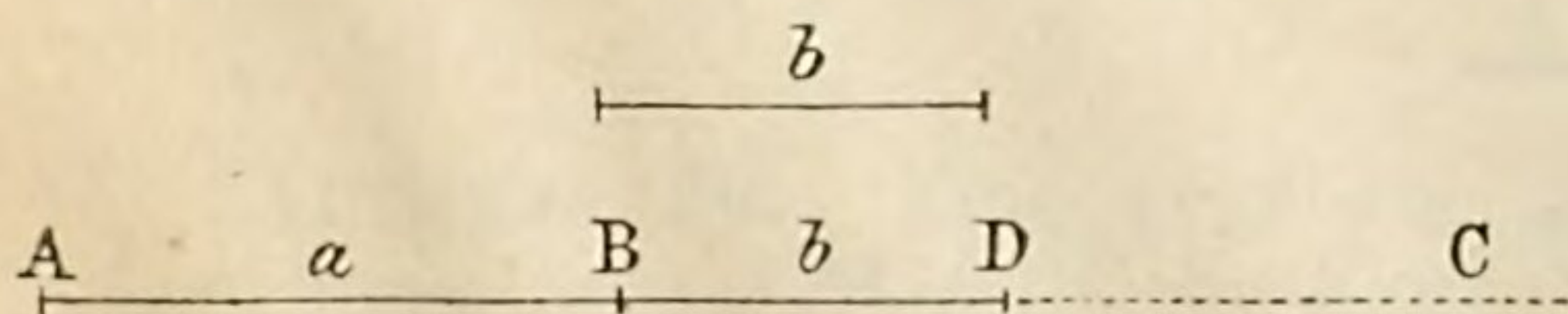


Auflösung. Man lege einen Metermassstab, siehe Figur 35, so an die zumesende Strecke AB , siehe Figur 68, dass derselbe mit seinem Nullpunkt einem Endpunkt von AB , z. B. dem Punkt A , und überall der Strecke AB genau anliegt, wie die Figur 68 zeigt, lese alsdann auf dem Massstab ab, welcher Teilpunkt des Massstabes an den andern Endpunkt B der Strecke zu liegen kommt.

Fällt der andere Endpunkt B der Strecke AB nicht gerade auf einen markierten Teilpunkt des Massstabes, sondern zwischen zwei solche, wie z. B. in der Figur 68, so lese man den nächst vorhergehenden Teilpunkt, in Figur 68 also 4 cm, ab, und messe den Rest der Strecke mittels der nächst niedrigeren Decimaleinteilung des Massstabes, in der Figur 68 also mittels der am Anfang des Massstabes verzeichneten Millimeteerteilung, in der Weise, wie oben angedeutet; es ergibt sich, dass die Strecke AB 4 cm 8 mm oder 4,8 cm oder 0,48 dm oder 0,048 m misst.

Aufgabe 24. Man soll eine gegebene Strecke a um eine andere gegebene Strecke b verlängern.

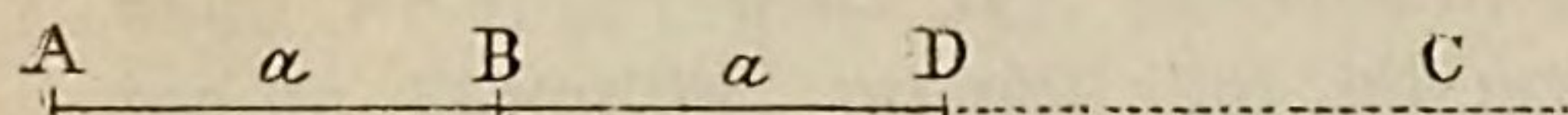
Figur 69.



Auflösung. Ist, siehe Figur 69, AB die gegebene Strecke a , welche um eine andere gegebene Strecke, um die Strecke b verlängert werden soll, so verlängere man zuerst die Strecke AB , mittels eines ihr angelegten Lineals über den einen oder den andern ihrer Endpunkte, z. B. über den Endpunkt B nach BC hin, trage dann auf den Strahl BC die andere gegebene Strecke b vom Anfangspunkt B desselben mittels eines Zirkels oder eines Massstabes, wie früher gezeigt wurde, nach BD ab; die somit erhaltene Strecke AD ist die um b verlängerte Strecke a .

Aufgabe 25. Es soll eine gegebene Strecke a um sich selbst verlängert werden.

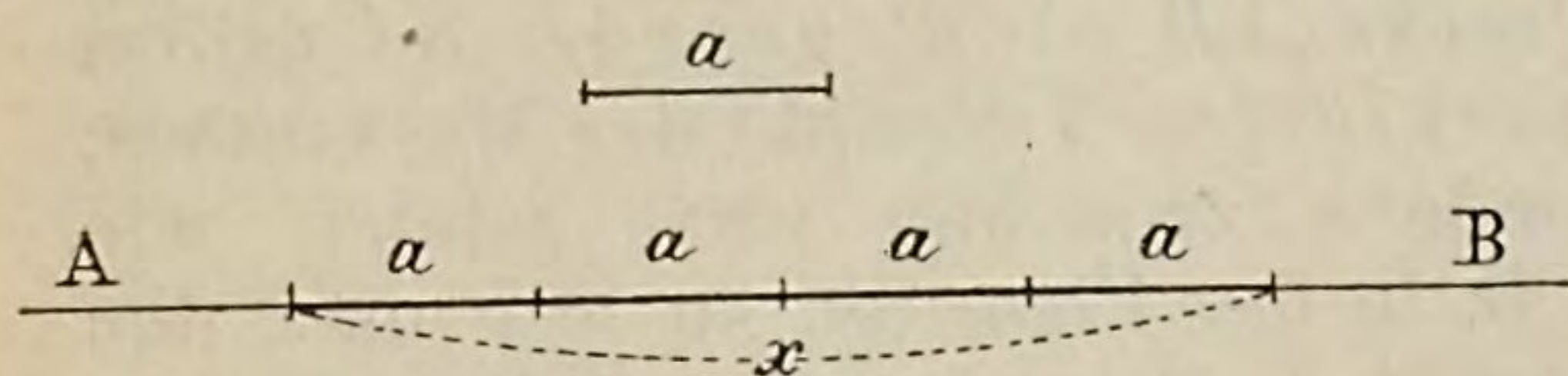
Figur 70.



Andeutung. Man verfähre, wie in voriger Auflösung gezeigt wurde, nur beachte man, dass die Strecke b in jener Auflösung hier ebenfalls die Strecke a ist (siehe Figur 70).

Aufgabe 26. Gegeben ist eine Strecke a ; man bestimme eine Strecke x , welche $= 4 \cdot a$ ist.

Figur 71.



Erkl. 228. Hat man mittels eines Massstabes die Strecke a gemessen und z. B. gefunden, dass $a = 1$ cm ist, so beachte man, dass:

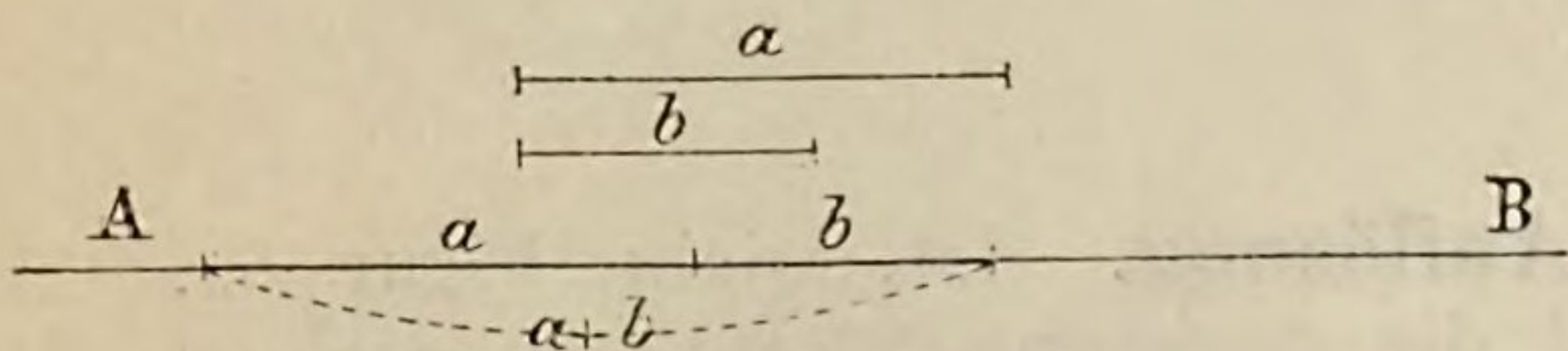
$x = 4 \cdot a$ also $= 4 \cdot 1$ oder $= 4$ cm ist.

Auflösung Der Aufgabe gemäss soll man eine Strecke konstruieren, welche viermal so lang ist als die gegebene Strecke a ; dies kann man wie folgt: Man ziehe eine beliebige Gerade AB , siehe Figur 71, und trage die gegebene Strecke a mittels eines Zirkels oder eines Massstabes (siehe Erkl. 228), wie in vorstehender Aufgabe gezeigt, viermal aneinander auf der Geraden AB ab; man erhält somit die Strecke x , welche $= 4 \cdot a$ ist, in Zeichen:

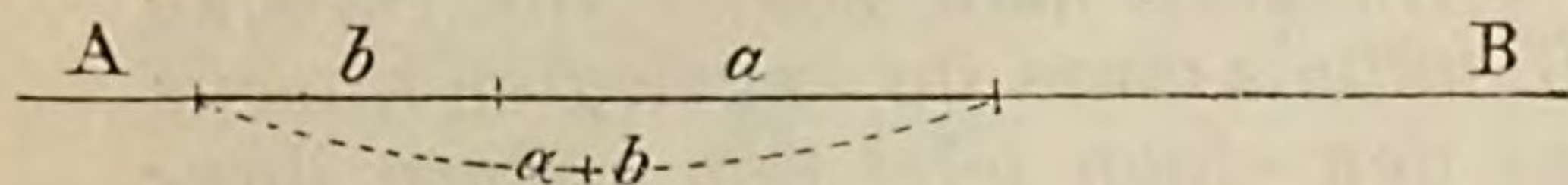
$$x = 4 \cdot a$$

Aufgabe 27. Man soll die Summe zweier gegebenen Strecken a und b konstruieren.

Figur 72.



Figur 72a.



Auflösung. Man trage, wie in Auflösung zur Aufgabe 24 gezeigt, die eine gegebene Strecke als eine Verlängerung an die andere gegebene Strecke an; oder man trage auf einer beliebigen Geraden die gegebenen Strecken a und b aneinander, wie die Figur 72 oder die Figur 72a zeigt (siehe die Erkl. 229).

Erkl. 229. Benutzt man bei der Auflösung der Aufgabe 27 einen Masstab und hat man z. B. gefunden, dass:

$$a = 2,05 \text{ cm}$$

$$b = 1,25 \text{ cm}$$

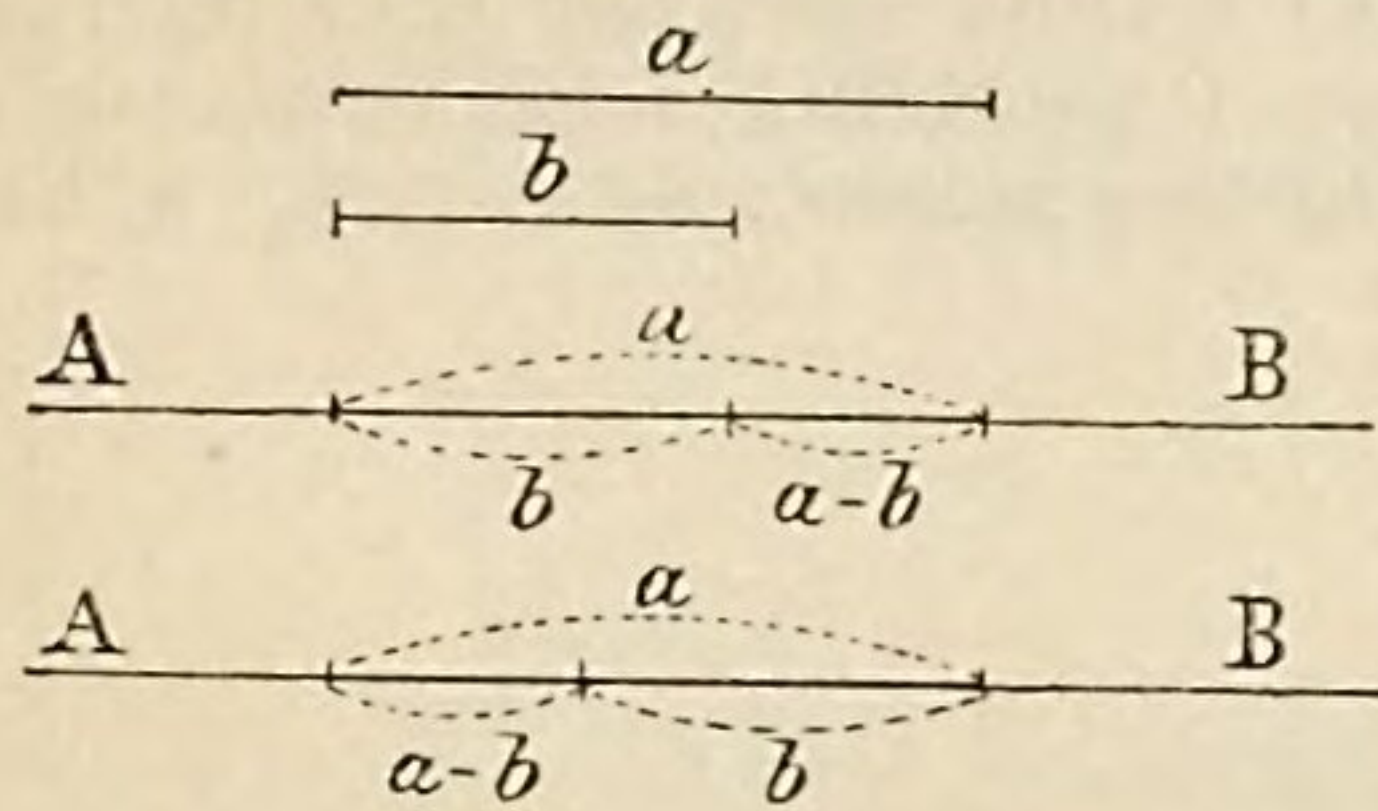
ist, so beachte man, dass:

$$x = a + b \text{ also } = 2,05 \text{ cm} + 1,25 \text{ cm} \\ \text{oder } = 3,3 \text{ cm}$$

ist.

Aufgabe 28. Man soll den Unterschied oder die Differenz zweier Strecken a und b konstruieren.

Figur 73 und 73a.



Auflösung. Man trage die kleinere der gegebenen Strecken, hier die Strecke b , auf der grösseren Strecke a , wie die Figur 73 oder die Figur 73a zeigt, ab; der übrig bleibende Rest der Strecke a ist die gesuchte Differenz x der Strecken a und b ; es ist nämlich:

$$x = a - b$$

(siehe die Erkl. 230 und 231).

Erkl. 230. Benutzt man bei der Auflösung der Aufgabe 28 einen Massstab und man hat z. B. gefunden, dass:

$$a = 2,05 \text{ cm}$$

$$b = 1,25 \text{ cm}$$

ist, so beachte man, dass:

$$x = a - b \text{ also } = 2,05 \text{ cm} - 1,25 \text{ cm} \\ \text{oder } = 0,8 \text{ cm}$$

ist.

Erkl. 231. Die Konstruktion der Summe zweier Strecken nennt man auch das Antragen der einen Strecke an die andere; die Konstruktion der Differenz zweier Strecken nennt man auch das Abtragen der einen Strecke auf der andern.

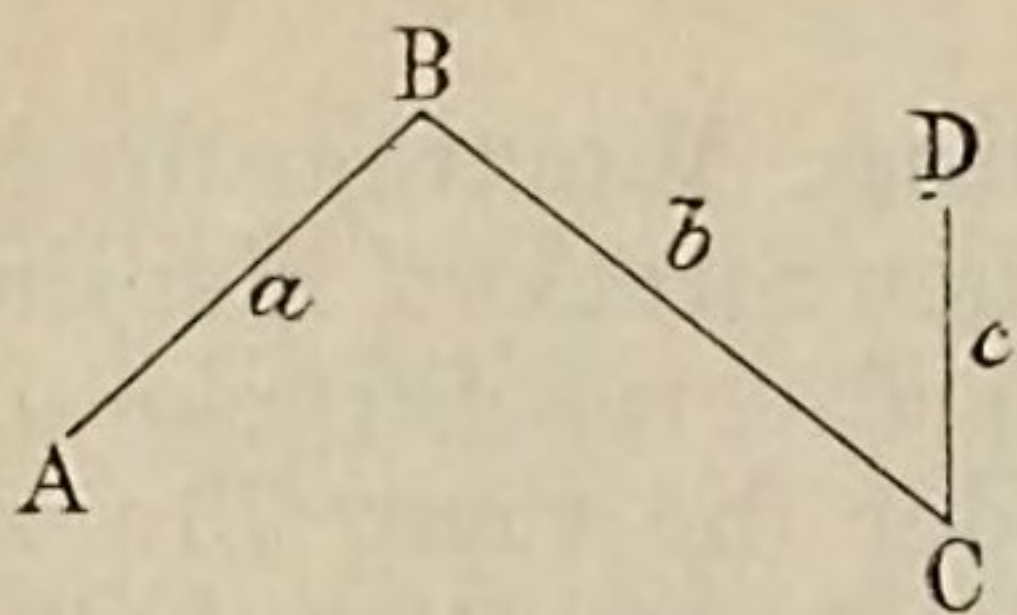
Aufgabe 29. Man soll eine gegebene Strecke a um eine andere Strecke b verkürzen.

Auflösung. Die Verkürzung einer Strecke a um eine andere Strecke b kann nur dann stattfinden, wenn die Strecke b kleiner als die Strecke a ist; ist dies der Fall, wie bei den Strecken a und b in Figur 73, so bestimme man die Differenz x dieser Strecken a und b , wie die Figur 73 oder Figur 73a zeigt, siehe Auflösung der Aufgabe 28. Die Strecke x stellt die Differenz der Strecken a und b oder die um b verkürzte Strecke a dar.

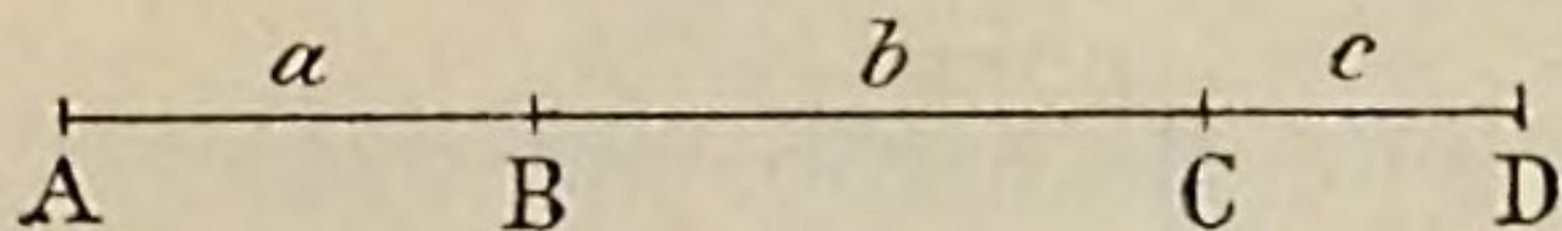
Aufgabe 30. Eine gegebene gebrochene Linie $ABCD$, siehe Figur 74, soll in eine gerade Linie, bzw. in eine Strecke verwandelt werden.

Auflösung. Man trage die Strecken a , b und c , aus welchen die durch die Figur 74 dargestellte gebrochene Linie $ABCD$ gebildet wird, auf einer Ge-

Figur 74.



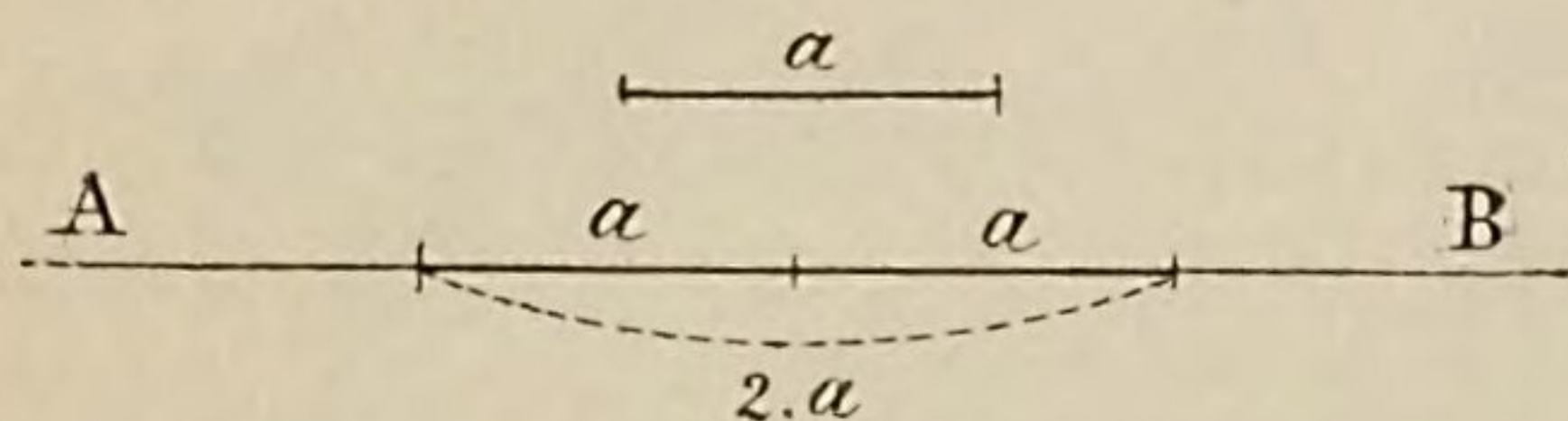
Figur 75.



raden aneinander an, wie die Figur 75 zeigt, in welcher AD die in eine gerade Linie, bzw. die in eine Strecke verwandelte durch Figur 74 dargestellte gebrochene Linie $ABCD$ ist.

Aufgabe 31. Das Doppelte einer gegebenen Strecke a zu konstruieren.

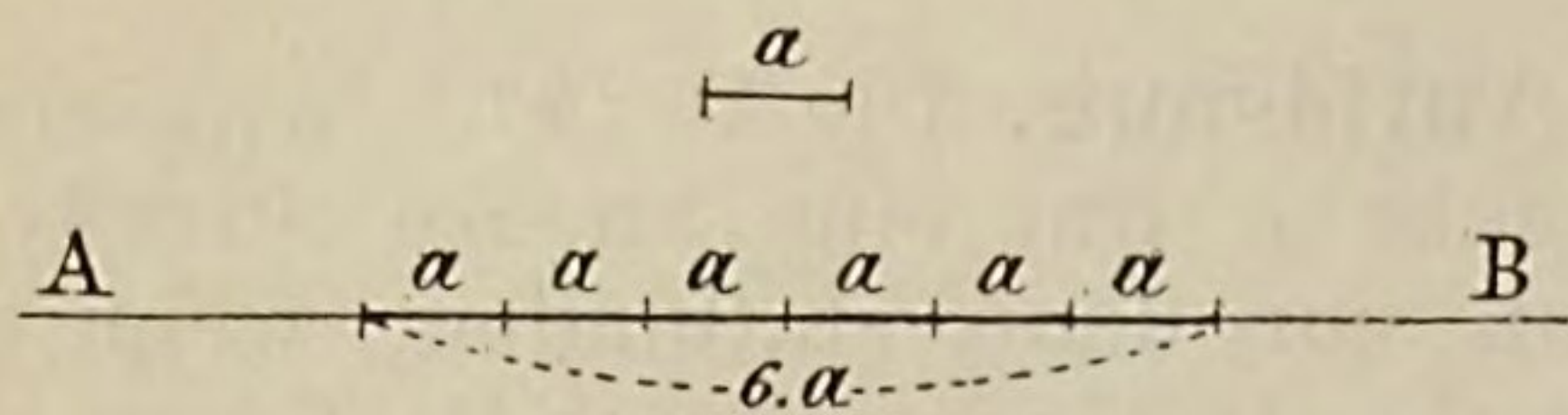
Figur 76.



Auflösung. Man konstruiere, wie in Auflösung der Aufgabe 26 gezeigt ist, eine Strecke x , welche $= 2 \cdot a$ ist, siehe Figur 76.

Aufgabe 32. Eine Strecke x zu ziehen, welche sechsmal so gross als eine gegebene Strecke a ist.

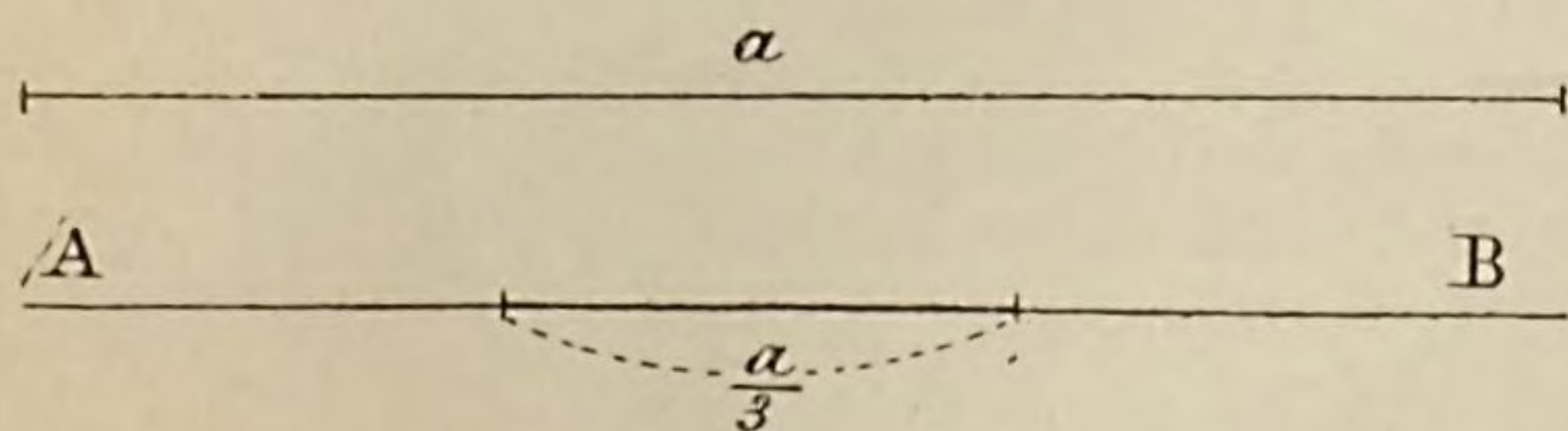
Figur 77.



Auflösung. Man konstruiere, wie früher gezeigt, eine Strecke x , welche $= 6 \cdot a$ ist, siehe Figur 77.

Aufgabe 33. Eine Strecke x zu konstruieren, welche gleich dem dritten Teil einer gegebenen Strecke a ist.

Figur 78.



Auflösung 1. Man wähle irgend eine Zirkelöffnung, trage dieselbe dreimal aneinander und untersuche, ob die hierdurch erhaltene Strecke die gegebene Strecke a ist; ist dies zufälligerweise der Fall, so ist jene gewählte Zirkelöffnung, d. i. die Entfernung der beiden Spitzen des Zirkels, der gesuchte dritte Teil x der Strecke a , in Zeichen:

$$x = \frac{a}{3}$$

indem:

$$3 \cdot x = a$$

ist.

Erkl. 232. Auf welche Weise man eine Strecke in eine beliebige Anzahl bestimmter Teile teilen kann und zwar ohne Probieren, wie in nebenstehender Auflösung 1 gesagt ist, kann erst in späteren Abschnitten gezeigt werden.

Trifft jener Zufall nicht ein, so muss man so lange eine andere Zirkelöffnung wählen, bis dies der Fall ist; bei einiger Uebung wird man bald hierzu gelangen (siehe Erkl. 232).

Auflösung 2. Man messe die gegebene Strecke a mittels eines Metermassstabes, dividiere die erhaltene Masszahl durch 3; die nach dieser Division erhaltene Zahl stellt die Masszahl dar, welche die Länge des gesuchten dritten Teils x angibt.

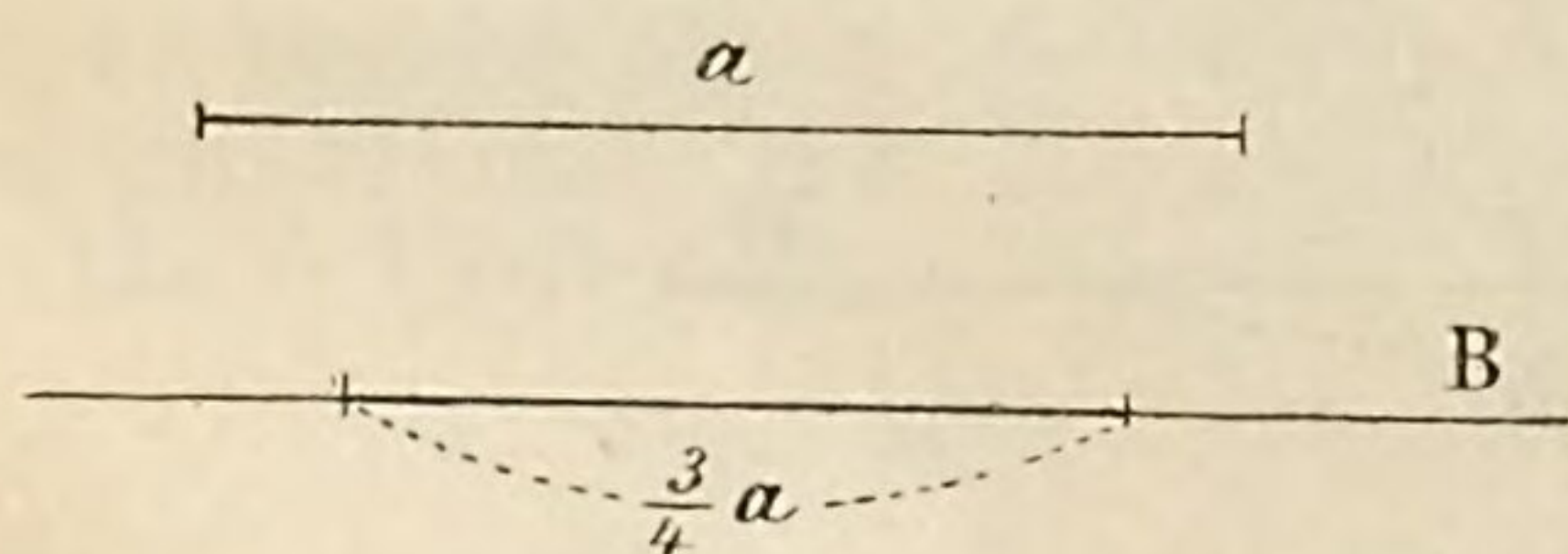
Die Strecke a in Figur 78 misst z. B. $= 6,3$ cm. Da nun:

$$x = \frac{a}{3} \text{ also } = \frac{6,3}{3} \text{ cm} \\ \text{oder } = 2,1 \text{ cm}$$

ist, so kann man hiernach die Strecke x leicht bestimmen, wie in Auflösung der Aufgabe 21 gesagt ist.

Aufgabe 34. Eine Strecke x zu konstruieren, welche $\frac{3}{4}$ einer gegebenen Strecke a ist.

Figur 79.



Erkl. 233. Die Aufgabe 34 kann man auch lösen, wie in der Auflösung 2 der Aufgabe 33 gesagt wurde.

Man erhält durch Messung:

$$a = 3,6 \text{ cm}$$

Da nun:

$$x = \frac{3}{4} \cdot a$$

sein soll, so muss hiernach:

$$x = \frac{3}{4} \cdot 3,6 \text{ oder } = 2,7 \text{ cm}$$

sein.

Ist die Länge von x aber bekannt, so kann man sie leicht nach Auflösung der Aufgabe 21 konstruieren.

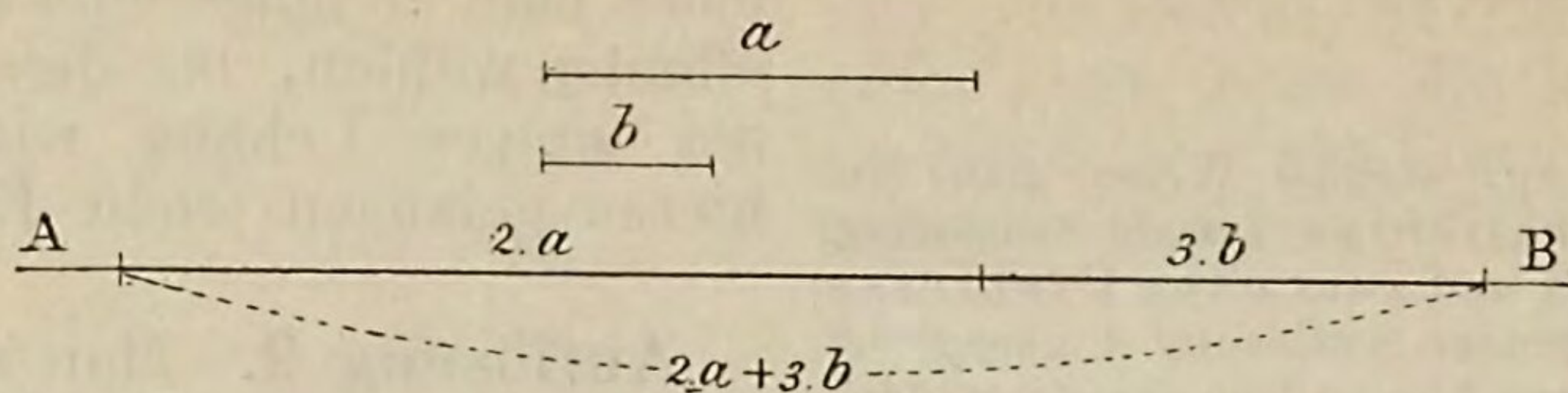
Auflösung. Der Aufgabe gemäss soll man eine Strecke x konstruieren, die mit der gegebenen Strecke a in der Beziehung:

$$x = \frac{3}{4} \cdot a$$

steht; dies kann man wie folgt:

Man teile, wie in der Auflösung 1 zur Aufgabe 33 gesagt wurde, die gegebene Strecke a in vier gleiche Teile; die Summe dreier dieser Teile ist die gesuchte Strecke x (siehe Figur 79 und die Erkl. 233).

Figur 80.



Aufgabe 35. Zwei Strecken a und b sind gegeben; man soll eine Strecke x so konstruieren, dass:

$$x = 2a + 3b$$

ist.

Erkl. 234. Durch Messung erhält man:

$$a = 2,3 \text{ cm}$$

$$b = 9 \text{ mm oder } = 0,9 \text{ cm}$$

mithin, da:

$$x = 2a + 3b$$

sein soll:

$$x = (2 \cdot 2,3 + 3 \cdot 0,9) \text{ cm}$$

oder:

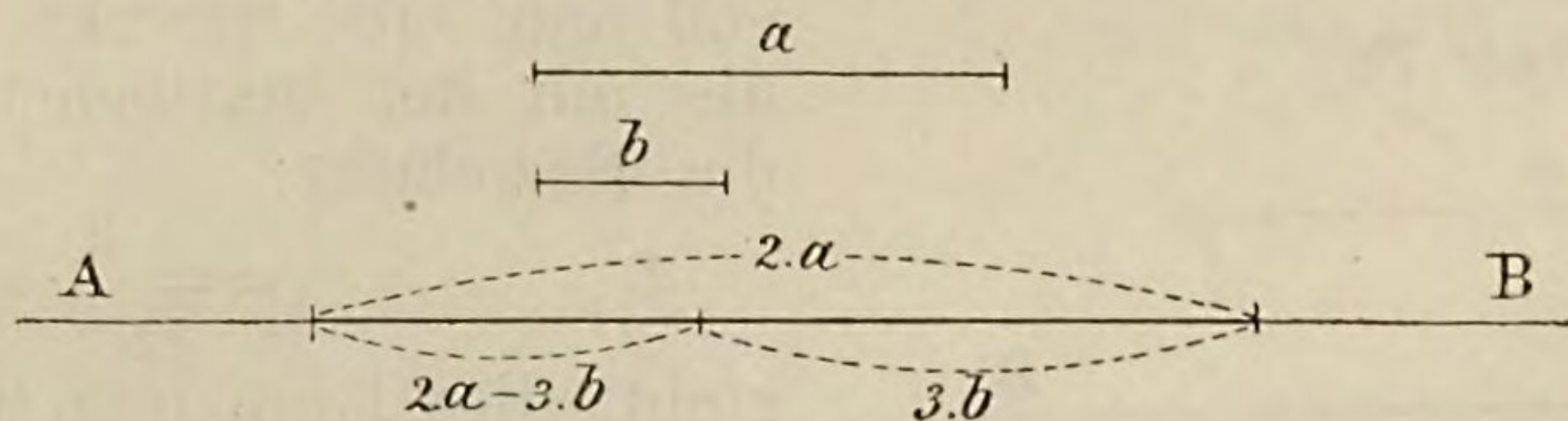
$$x = (4,6 + 2,7) \text{ cm}$$

mithin:

$$x = 7,3 \text{ cm}$$

Auflösung. Man trage, wie die Figur 80 zeigt, auf einer beliebigen Geraden AB die Strecke a zweimal aneinander und hieran trage man die Strecke b dreimal.

Figur 81.



Aufgabe 36. Zwei Strecken a und b sind gegeben; man soll eine Strecke x so konstruieren, dass:

$$x = 2a - 3b$$

ist.

Erkl. 235. Durch Messung erhält man:

$$a = 2,3 \text{ cm}$$

$$b = 9 \text{ mm oder } = 0,9 \text{ cm}$$

mithin, da:

$$x = 2a - 3b$$

ist:

$$x = (2 \cdot 2,3 - 3 \cdot 0,9) \text{ cm}$$

oder:

$$x = (4,6 - 2,7) \text{ cm}$$

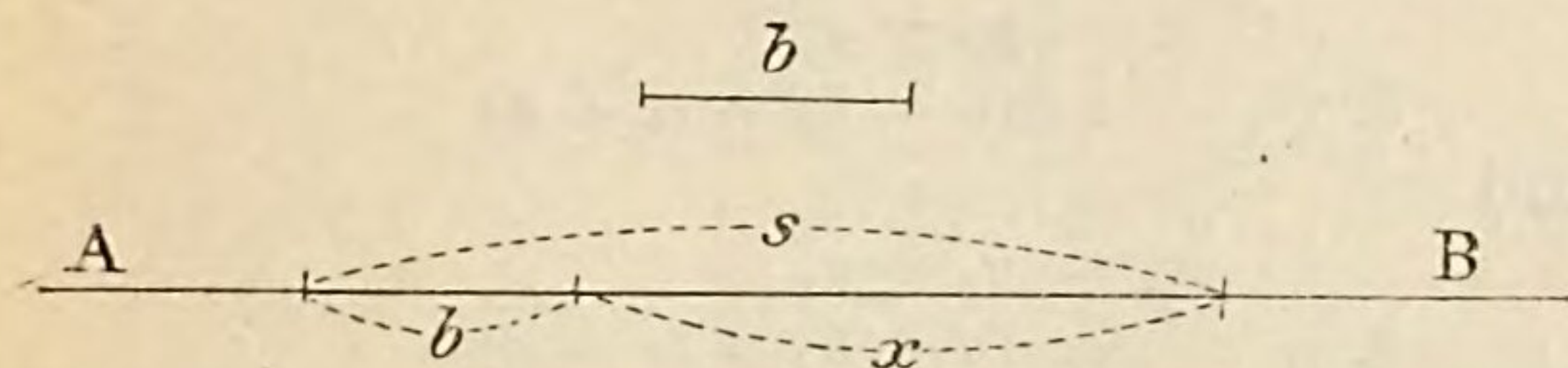
mithin:

$$x = 1,9 \text{ cm}$$

Auflösung. Man trage, wie die Figur 81 zeigt, auf einer beliebigen Geraden AB die Strecke a zweimal aneinander und auf dieser somit erhaltenen Strecke trage man b dreimal nacheinander ab.

Aufgabe 37. Man kennt die Summe s zweier Strecken x und b und eine dieser, nämlich die Strecke b ; man soll die andere Strecke x finden.

Figur 82.



Auflösung. Man trage auf der gegebenen Strecke s , welche die Summe der beiden Strecken x und b vorstellt, die gegebene Strecke b ab, wie die Figur 82 zeigt; der Rest, welcher hiernach von jener Strecke übrig bleibt, ist die gesuchte andere Strecke x .

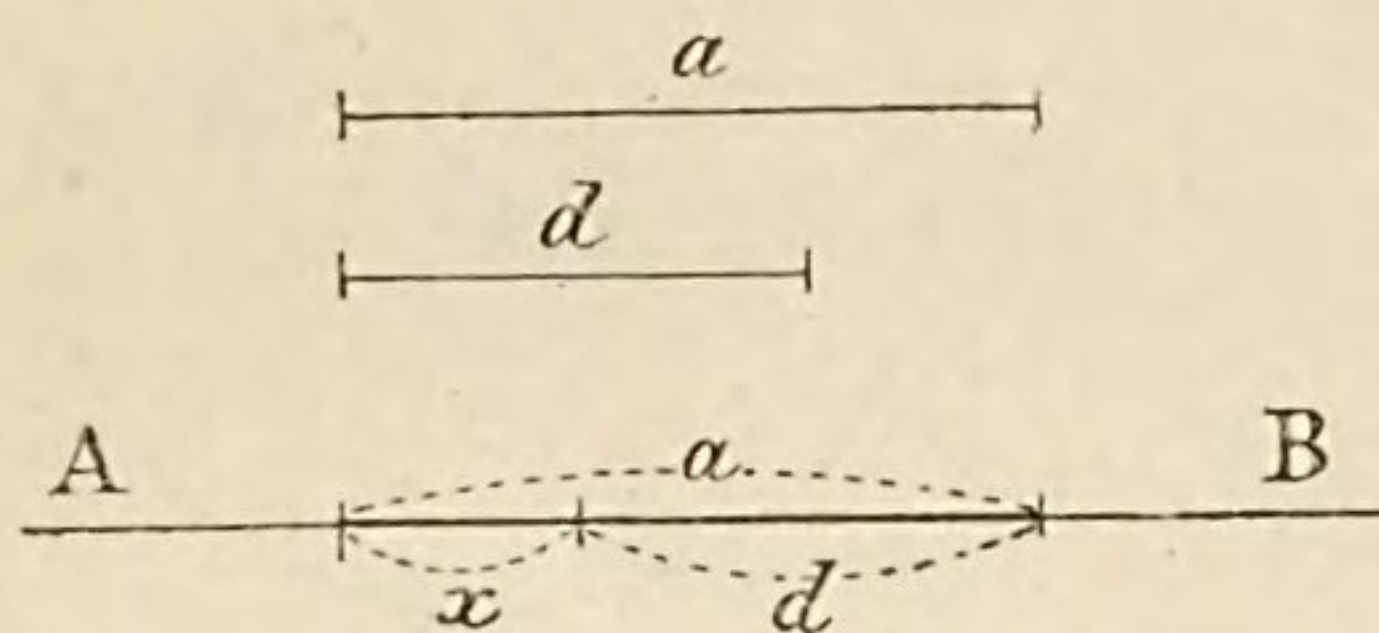
Aus der Figur 82 ergibt sich, dass:

$$s = x + b$$

ist.

Aufgabe 38. Man kennt die Differenz d zweier Strecken a und x , sowie die grössere dieser beiden Strecken, nämlich a ; man soll die kleinere Strecke x bestimmen.

Figur 83.



Auflösung. Man trage die gegebene Differenz d auf der gegebenen Strecke a ab, wie die Figur 83 zeigt; der Rest, welcher von der Strecke a übrig bleibt, ist die gesuchte kleinere Strecke x .

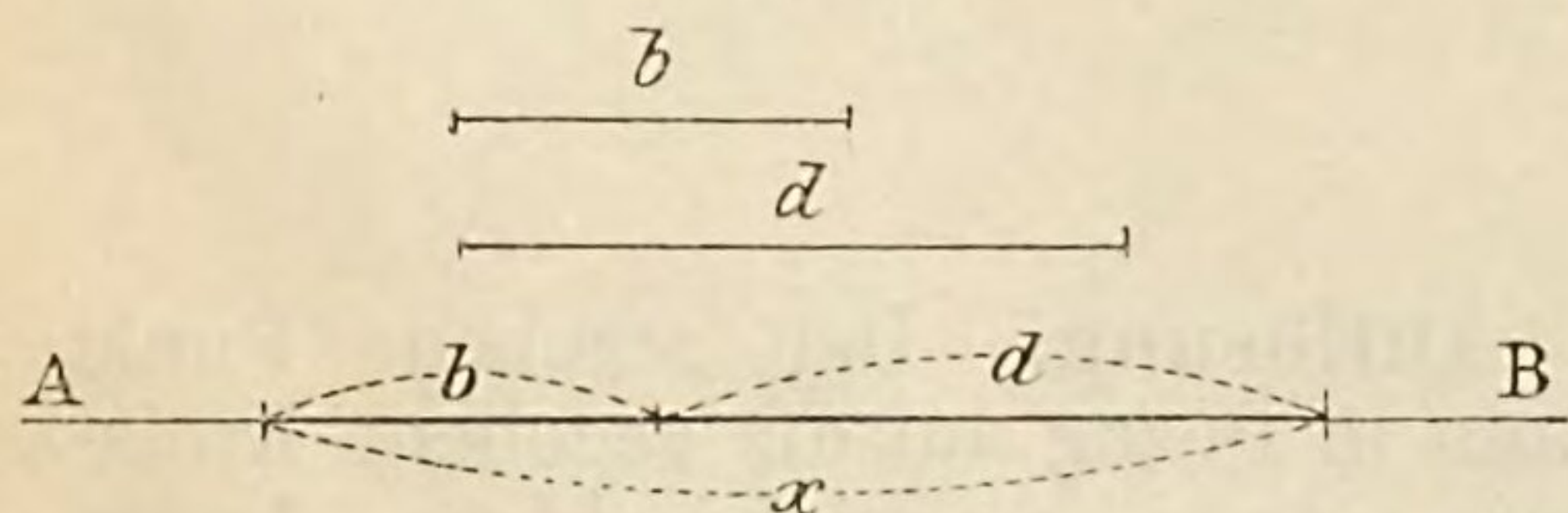
Aus der Figur 83 ergibt sich, dass:

$$d = a - x$$

ist.

Aufgabe 39. Man kennt die Differenz d zweier Strecken x und b , sowie die kleinere dieser beiden Strecken, nämlich b ; man soll die grössere Strecke x bestimmen.

Figur 84.



Auflösung. Man trage an die gegebene kleinere Strecke b die gegebene Differenz d , wie Figur 84 zeigt; die Strecke, welche man hierdurch als Summe jener Strecken erhält, ist die gesuchte grössere Strecke x .

Aus der Figur 84 ergibt sich, dass:

$$d = x - b$$

ist.

Aufgabe 40. Die vier Strecken a , b , c und d sind gegeben; man soll die Strecke x so konstruieren, dass:

a) $x_1 = (a - b) + (c - d)$

b) $x_2 = (a + b) - (c + d)$

c) $x_3 = (a - b) + (c + d)$

und

d) $x_4 = (a + b) - (c - d)$

ist.

Auflösung. Man konstruiere, wie die Figuren 85 bis 88 zeigen, zuerst die Strecken:

$$y_1 = a - b$$

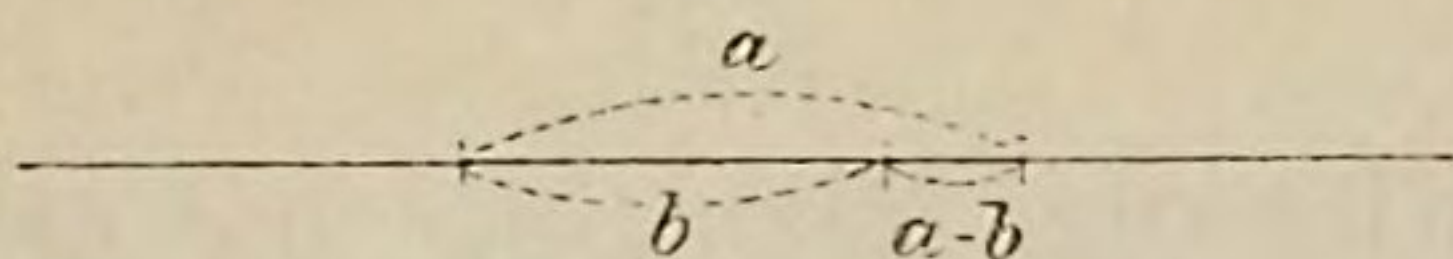
$$y_2 = a + b$$

$$y_3 = c - d$$

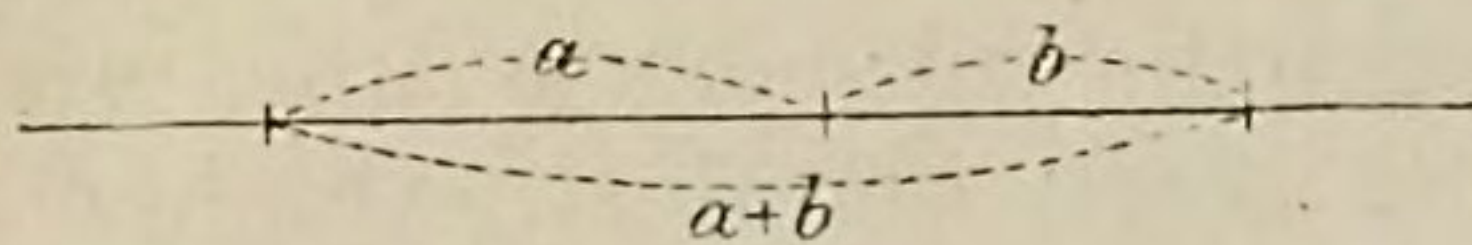
$$y_4 = c + d$$

und

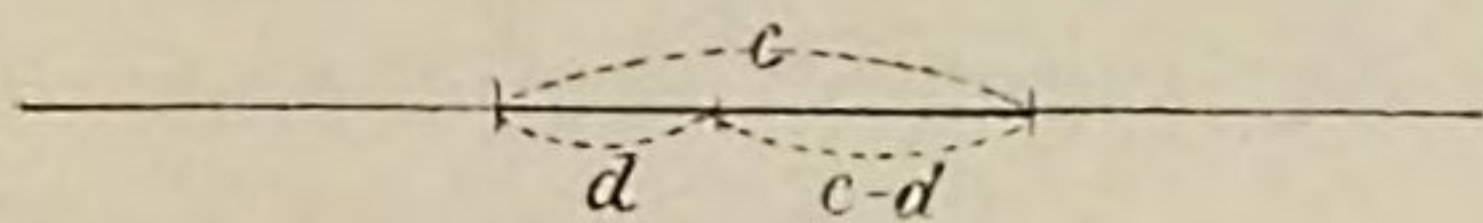
Figur 85.



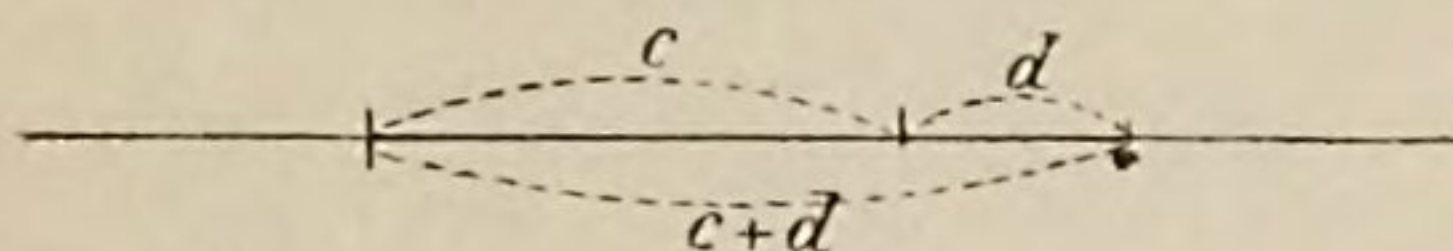
Figur 86.



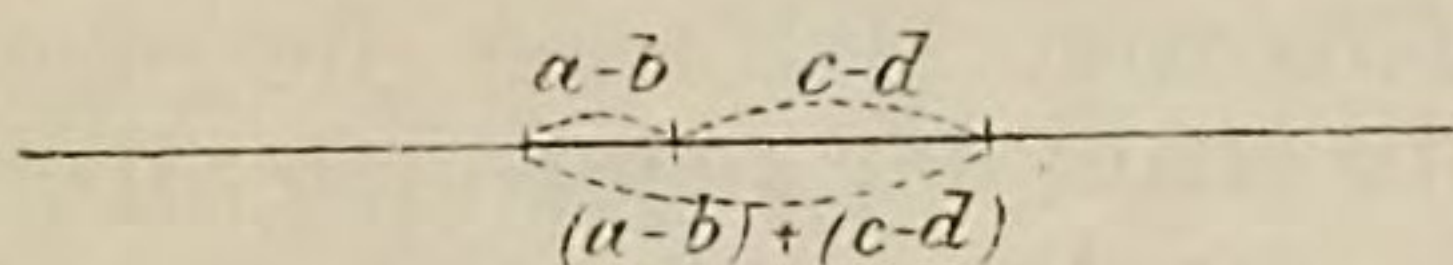
Figur 87.



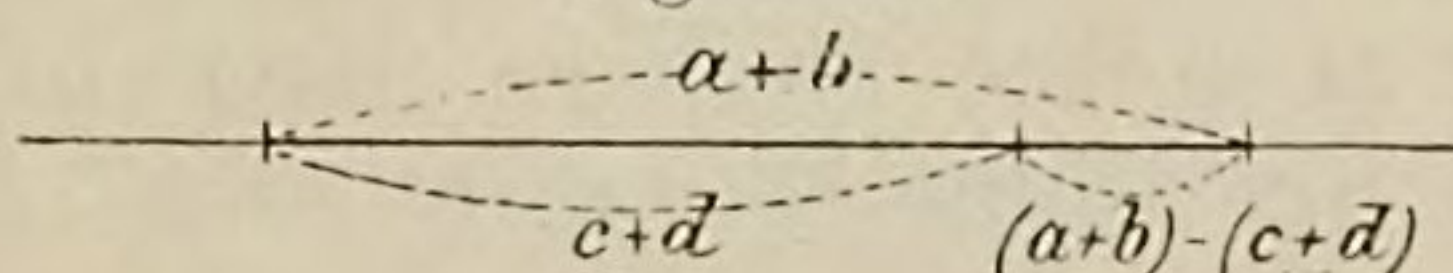
Figur 88.



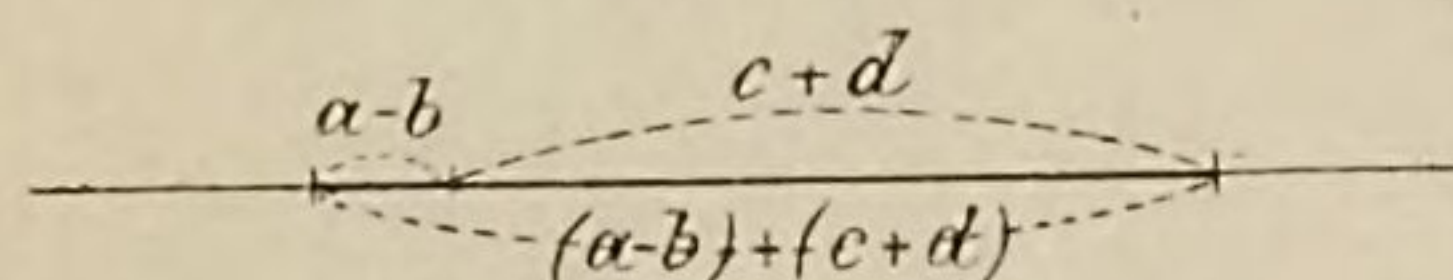
Figur 89.



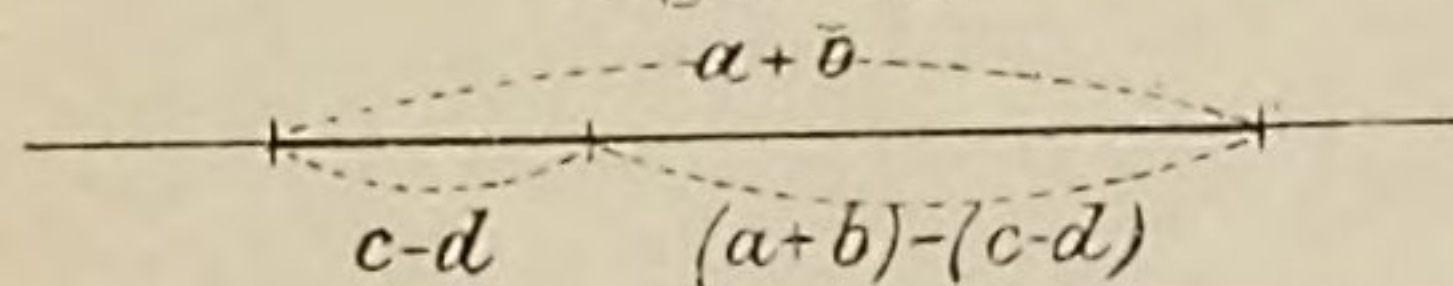
Figur 90.



Figur 91.



Figur 92.



Dann konstruiere man, wie die Figuren 89 bis 92 zeigen, die Strecken:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_3 \\ \text{d. i.} \quad &= (a - b) + (c - d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= y_2 - y_4 \\ \text{d. i.} \quad &= (a + b) - (c + d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= y_1 + y_4 \\ \text{d. i.} \quad &= (a - b) + (c + d) \end{aligned}$$

und

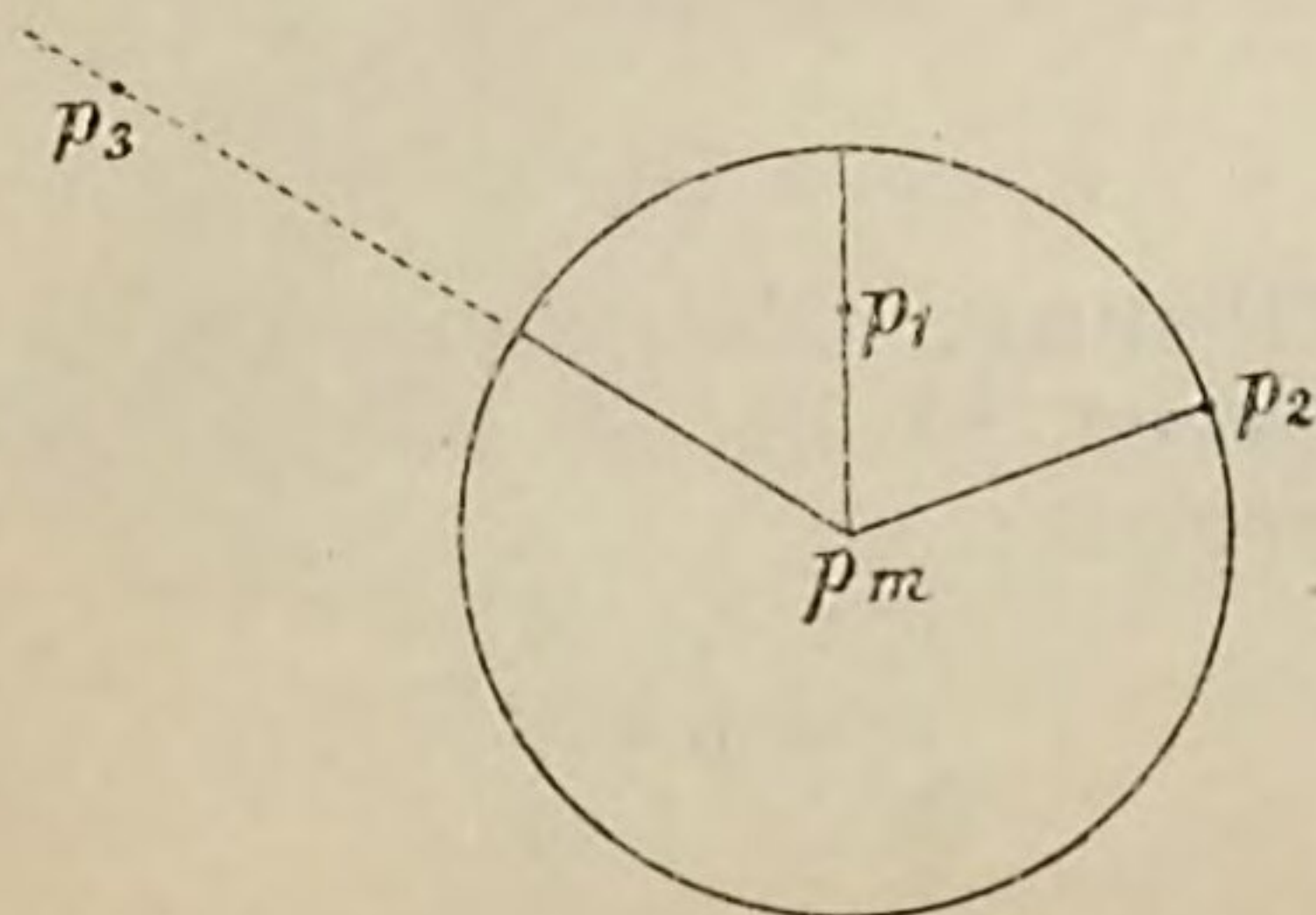
$$\begin{aligned} x_4 &= y_2 - y_3 \\ \text{d. i.} \quad &= (a + b) - (c - d) \end{aligned}$$

Aufgabe 41. Eine Kreislinie und deren Mittelpunkt ist gegeben; man soll:

- a) einen Radius,
- b) einen Durchmesser

zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht.

Figur 93.



Auflösung. Der gegebene Punkt kann in Bezug auf die gegebene Kreislinie drei verschiedene Lagen haben, er kann:

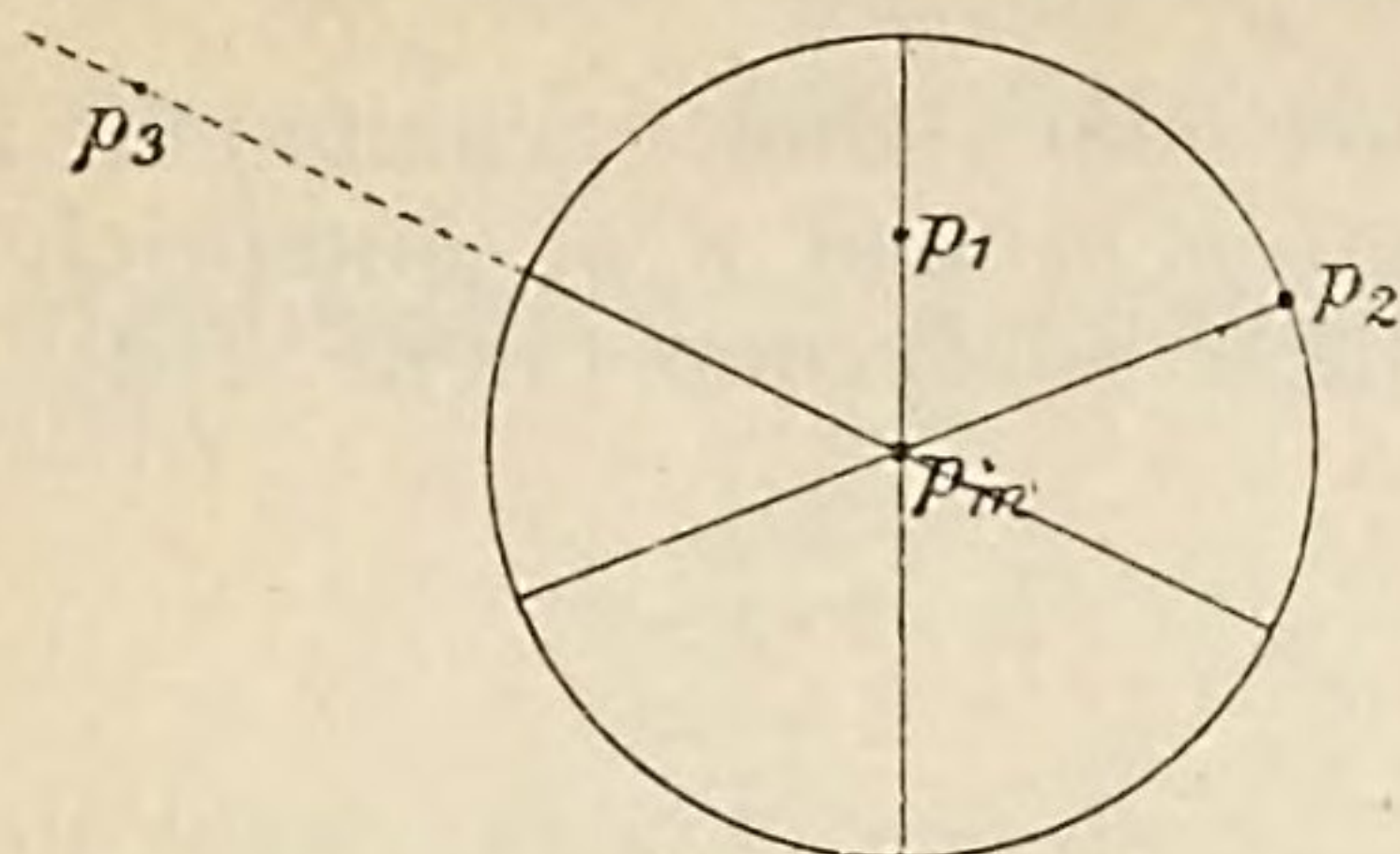
- 1) innerhalb der Kreislinie liegen,
- 2) ein Punkt der Kreislinie selbst sein,

oder er kann:

- 3) ausserhalb der Kreislinie liegen.

Zur Lösung der gestellten Aufgabe ziehe man, wie in den Figuren 93 und 94 angedeutet ist, durch den gegebenen Mittelpunkt p_m der gegebenen

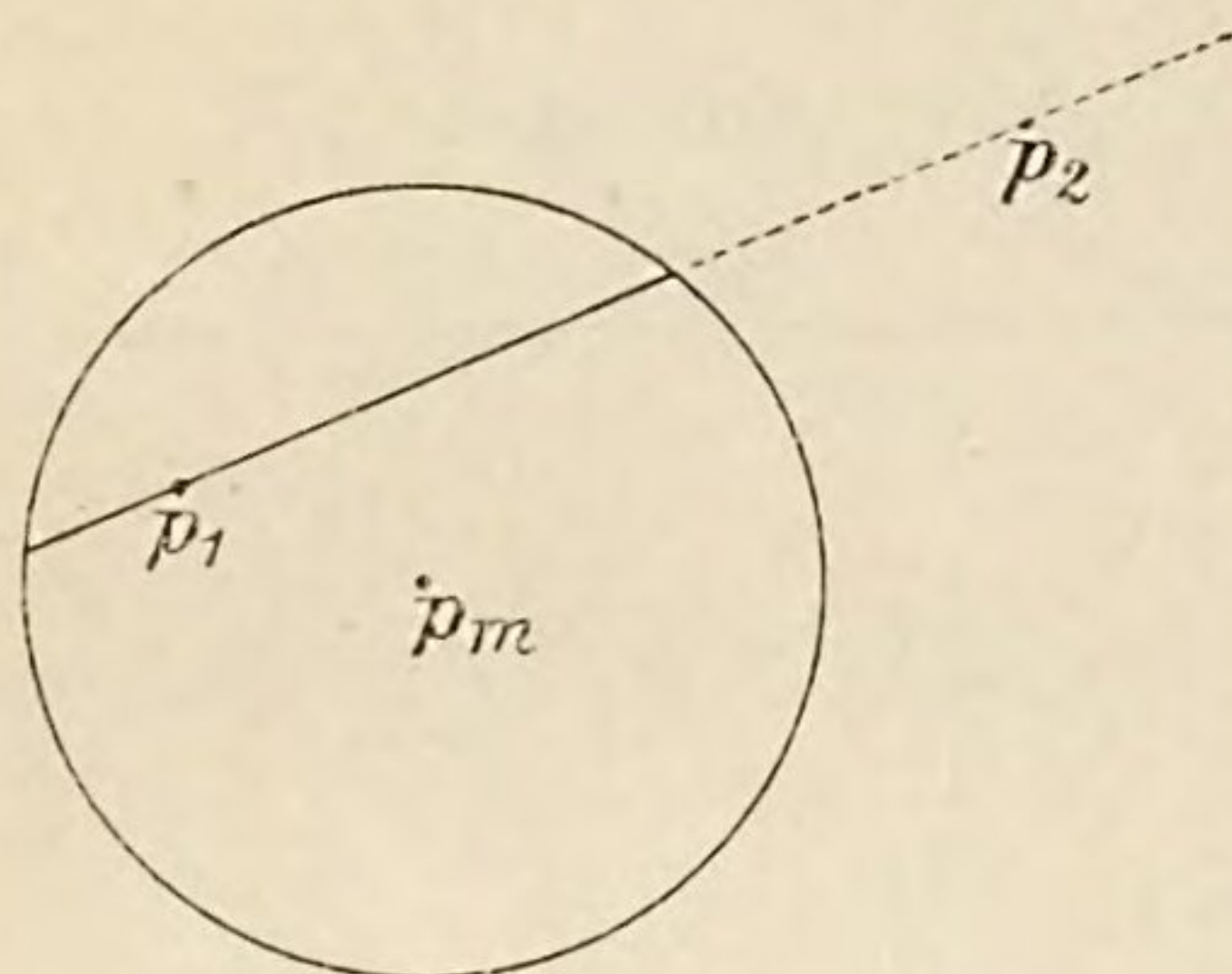
Figur 94.



Kreislinie und je einen der gewählten Punkte p_1 , p_2 und p_3 eine Gerade; die Teile dieser Geraden, welche in der Figur 93 zwischen p_m und die Kreislinie fallen, sind Radien, welche durch die Punkte p_1 , p_2 und p_3 gehen; die Teile jener Geraden, welche in der Figur 94 ganz innerhalb der Kreislinie zu liegen kommen, sind Durchmesser, welche durch die Punkte p_1 , p_2 , p_3 gehen.

Aufgabe 42. Zu einer gegebenen Kreislinie eine Sehne zu ziehen, welche durch zwei gegebene Punkte gehen soll.

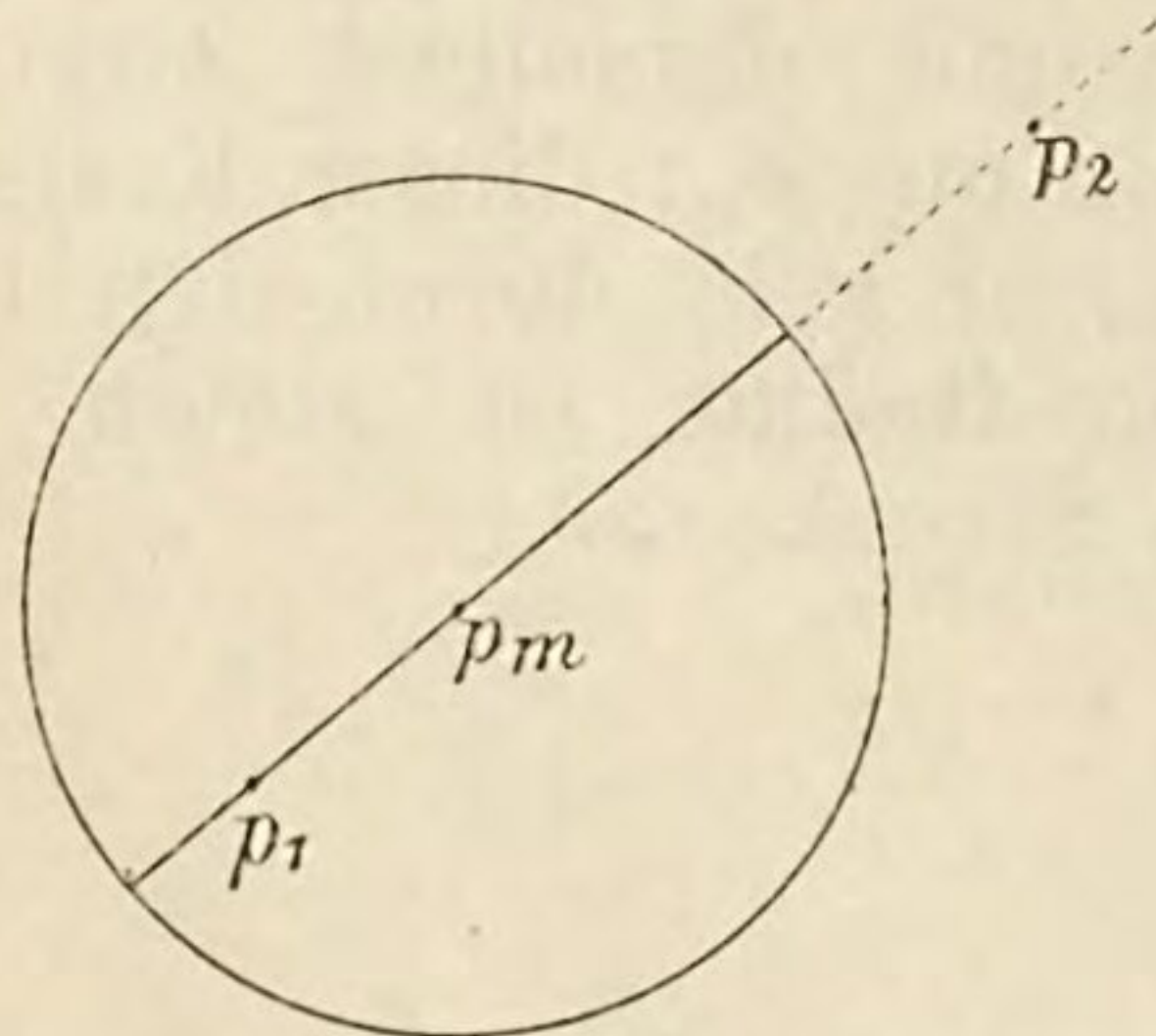
Figur 95.



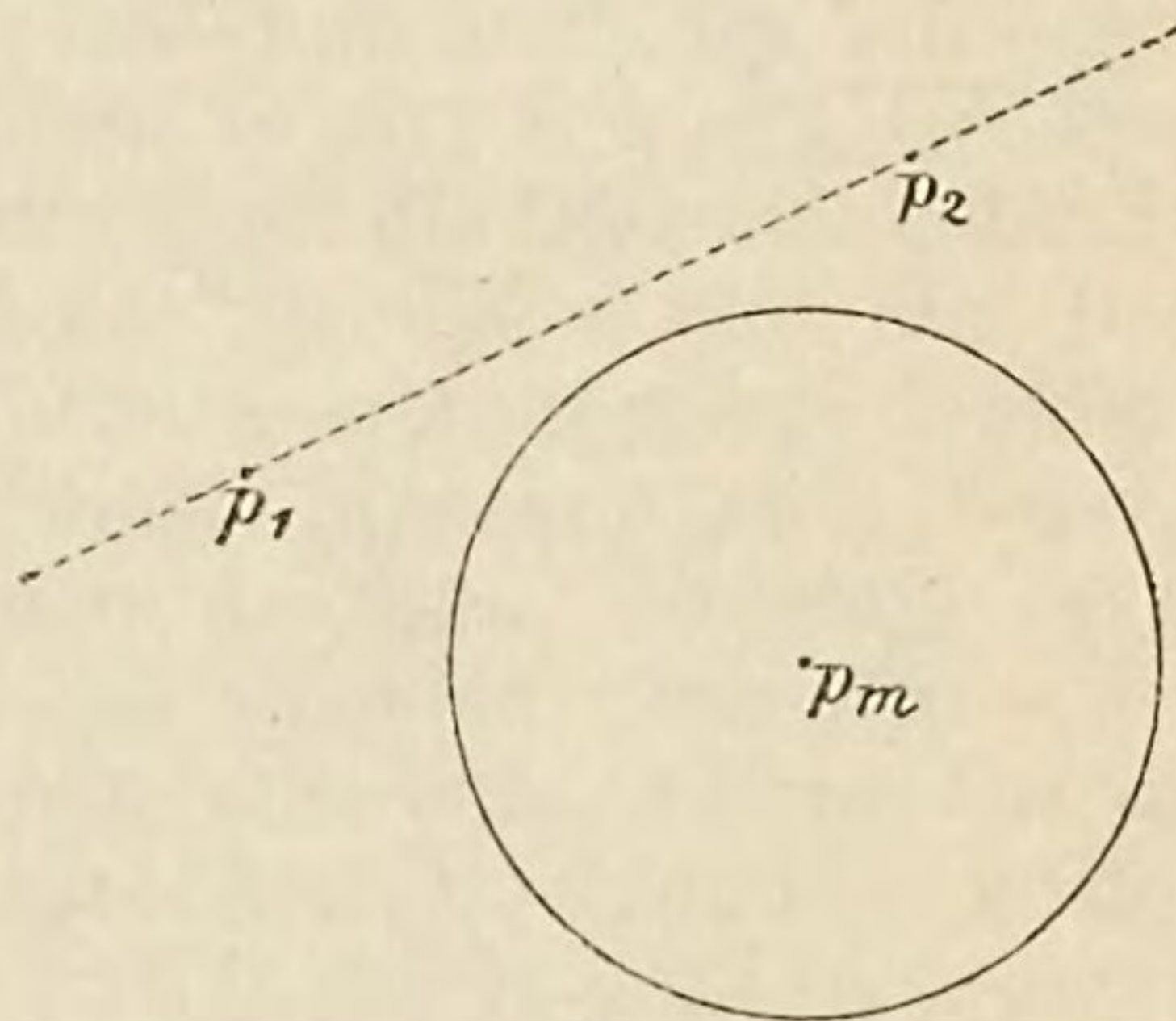
Auflösung. Man ziehe durch die gegebenen Punkte p_1 und p_2 , wie die Figur 95 zeigt, eine Gerade (siehe Auflösung der Aufgabe 16); der Teil dieser Geraden, welcher innerhalb der Kreislinie zu liegen kommt, ist die gesuchte Sehne (siehe Erkl. 236).

Erkl. 236. Je nach der Lage der gegebenen Punkte p_1 und p_2 (siehe Auflösung der Aufgabe 42) kann die gedachte Sehne zugleich ein Durchmesser sein, wie in Figur 96, oder sie kann unmöglich sein, wie in Figur 97.

Figur 96.



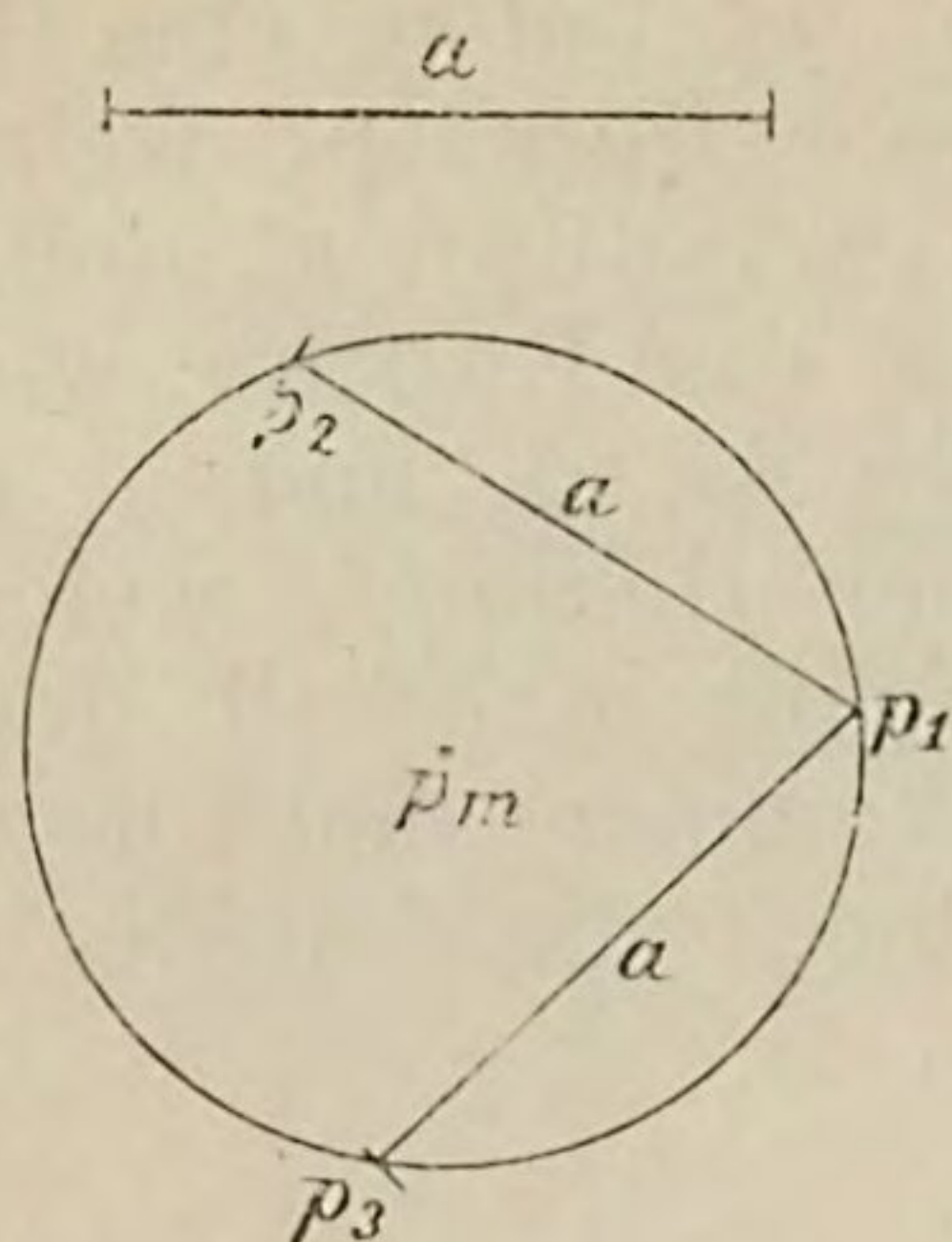
Figur 97.



Aufgabe 43. In eine gegebene Kreislinie eine Sehne zu ziehen, welche die Länge der Strecke a hat.

Auflösung. Man nehme die gegebene Strecke a in den Zirkel, setze, siehe Figur 98, in einen beliebigen Punkt p_1 der gegebenen Kreislinie um p_m ein und schlage die Strecke a auf der Kreis-

Figur 98.



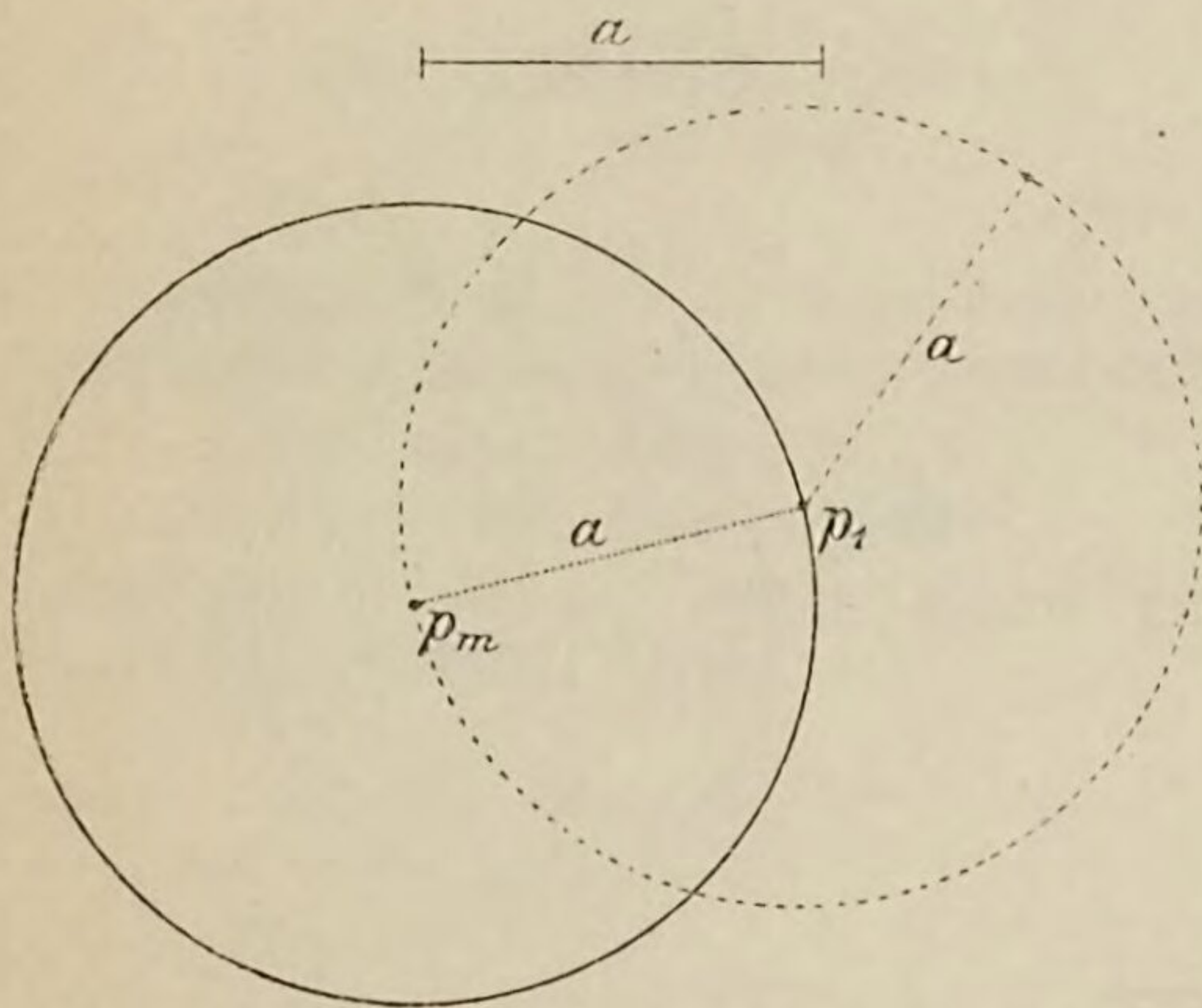
linie nach p_2 und p_3 hin ab, verbinde p_1 mit p_2 und p_3 .

Jede der somit erhaltenen zwei Sehnen p_1p_2 und p_1p_3 entspricht der gestellten Forderung (siehe Erkl. 237).

Erkl. 237. Ist die gegebene Strecke a (siehe Auflösung der Aufgabe 43) gleich dem Durchmesser des gegebenen Kreises, so ist die gesuchte Sehne selbst ein Durchmesser des Kreises. Ist die gegebene Strecke a grösser als der Durchmesser des gegebenen Kreises, so ist eine Lösung der Aufgabe unmöglich.

Aufgabe 44. Eine Strecke a und ein Punkt p_1 ist gegeben; man soll eine Kreislinie konstruieren, deren Radius gleich jener Strecke a ist und welche durch den gegebenen Punkt p_1 geht.

Figur 99.



Auflösung. Man beschreibe, siehe Figur 99, um den gegebenen Punkt p_1 mit der gegebenen Strecke a als Radius eine Hülfskreislinie, setze in einem beliebigen Punkt dieser Hülfskreislinie, z. B. in dem Punkt p_m ein und beschreibe mit derselben Zirkelöffnung den Kreis um p_m ; dieser Kreis ist der gesuchte, er geht durch den Punkt p_1 und sein Radius ist gleich der gegebenen Strecke a .

Erkl. 238. Wie sich aus nebenstehender Auflösung leicht erkennen lässt, gibt es unzählig viele Kreise, welche der in der Aufgabe 44 verlangten Forderung genügen.

D) Aufgaben, in welchen die Beweise zu aufgestellten Behauptungen gefordert werden.

Aufgabe 45. Ist in den Figuren 100 und 101:

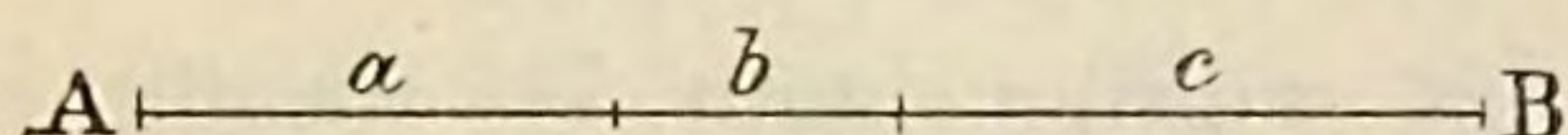
$$\begin{aligned} a &= d \\ b &= e \\ c &= f \end{aligned}$$

so soll man nachweisen, dass:

$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

ist.

Figur 100.



Figur 101.



Erkl. 239. Gleichungen werden addiert, indem man die linken Seiten derselben zu einander addiert, desgleichen die rechten Seiten zu einander addiert und die beiden erhaltenen Summen durch das Gleichheitszeichen verbindet (siehe Erkl. 240).

Erkl. 240. Einige Sätze aus der allgemeinen Grössenlehre heissen:

- 1) Jede Grösse ist sich selbst gleich.
- 2) Gleiches, zu Gleichem addiert, gibt Gleiches.
- 3) Gleiches, von Gleichem subtrahiert, gibt Gleiches.
- 4) Gleiches, mit Gleichem multipliziert, gibt Gleiches.
- 5) Gleiches, durch Gleiches dividiert, gibt Gleiches.

Auflösung. Gemäss der Aufgabe ist die

Voraussetzung:

$$\left. \begin{aligned} a &= d \\ b &= e \\ c &= f \end{aligned} \right\} \text{ siehe Figur 100 und 101}$$

und die

Behauptung:

$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

Den Beweis der Richtigkeit dieser Behauptung kann man wie folgt führen (siehe Erkl. 200):

Beweis I (geometrischer Beweis). Die Strecke AB , siehe Figur 100, besteht aus den drei Strecken a , b und c ; die Strecke CD , siehe Figur 101, besteht aus den drei Strecken f , d und e ; einerlei, in welcher Reihenfolge man sich die drei Strecken a , b und c , bzw. die drei Strecken f , d und e zusammengesetzt oder aneinandergetragen denkt, es entsteht immer dieselbe Strecke AB bzw. CD .

Da man nun nach der Voraussetzung und dem in der Erkl. 89 Gesagten die Strecke a auf die Strecke d , die Strecke b auf die Strecke e und die Strecke c auf die Strecke f so gelegt denken kann, dass diese Strecken sich bzw. vollkommen decken, so kann man sich auch die aus den Strecken a , b und c bestehende Strecke AB so auf die aus den Strecken f , d und e bestehende Strecke CD gelegt denken (oder umgekehrt), dass sich beide Strecken vollkommen decken, dass sie also kongruent und somit auch nach der Erkl. 89 einander gleich sind.

Beweis II (analytischer Beweis). Nach der Voraussetzung ist:

- 1) $\dots a = d$
- 2) $\dots b = e$
- 3) $\dots c = f$

Durch Addition dieser drei Gleichungen erhält man nach den Erkl. 239 und 240 die Gleichung:

$$4) \dots a + b + c = d + e + f$$

Da nun, wie sich aus der Figur 100 ergibt, die Summe $a + b + c$ der Strecken a , b und c gleich der Strecke $\overline{AB}$ und wie sich aus der Figur 101 ergibt, die Summe $d + e + f$ der Strecken d , e und f gleich der Strecke $\overline{CD}$ ist, da also in Gleichung 4):

$$5) \dots a + b + c = \overline{AB}$$

und

$$6) \dots d + e + f = \overline{CD}$$

gesetzt werden kann, so ergibt sich aus Gleichung 4):

$$A) \dots \overline{AB} = \overline{CD}$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 46. In Figur 102 ist:

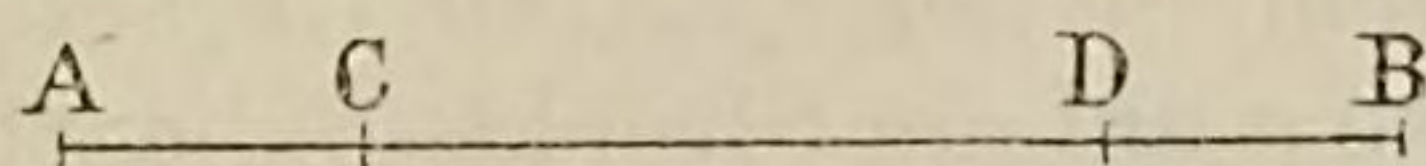
$$\overline{AC} = \overline{DB}$$

man soll beweisen, dass:

$$\overline{AD} = \overline{CB}$$

ist.

Figur 102.



Auflösung. Nach der Aufgabe ist die

Voraussetzung:

$$\overline{AC} = \overline{DB}$$

und die

Behauptung:

$$\overline{AD} = \overline{CB}$$

Den Beweis dieser Behauptung kann man wie folgt führen:

Beweis I (geometrischer Beweis). Nach dem in der Erkl. 240 angeführten Satz 2 und in Rücksicht darauf, dass in Figur 102 nach der Voraussetzung für die Strecke DB die Strecke AC und umgekehrt gesetzt werden kann, da beide Strecken gleich und somit nach der Erkl. 89 auch kongruent sind, muss, siehe Figur 102, die aus AC und CD bestehende Strecke AD gleich der aus CD und DB bestehenden Strecke CB sein.

Beweis II (analytischer Beweis). Nach der Voraussetzung ist:

$$a) \dots \overline{AC} = \overline{DB}$$

ferner ist nach Erkl. 240:

$$b) \dots \overline{CD} = \overline{CD}$$

Durch Addition dieser zwei Gleichungen erhält man nach der Erkl. 239:

$$c) \dots \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{DB} + \overline{CD}$$

Da sich nun aus der Figur 102 ergibt, dass:

$$d) \dots \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD}$$

und

$$e) \dots \overline{DB} + \overline{CD} = \overline{CB}$$

gesetzt werden kann, so erhält man in Rücksicht darauf aus Gleichung c):

$$A) \dots \overline{AD} = \overline{CB}$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 47. Ist in Figur 103:

$$\overline{AD} = \overline{DP}$$

und

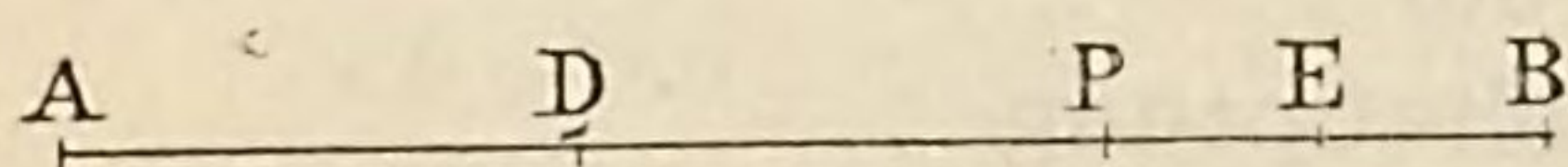
$$\overline{PE} = \overline{EB}$$

so wird behauptet, dass:

$$\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

ist.

Figur 103.



Auflösung. Nach der Aufgabe ist die

Voraussetzung:

$$\overline{AD} = \overline{DP}$$

und

$$\overline{PE} = \overline{EB}$$

ferner ist die

Behauptung:

$$\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

Den Beweis dieser Behauptung kann man wie folgt führen:

Beweis I (geometrischer Beweis). Da gemäss der Aufgabe in Figur 103 $\overline{AD} = \overline{DP}$ und $\overline{PE} = \overline{EB}$ ist, so kann man sich $\overline{AD}$ so auf $\overline{DP}$, ebenso $\overline{EB}$ so auf $\overline{PE}$ gelegt denken, dass diese Strecken sich bezw. decken. Aus der ganzen Strecke $\overline{AB}$ erhält man somit die Strecke $\overline{DE}$ zweimal; demnach muss $\overline{DE}$ halb so gross als $\overline{AB}$, d. h. es muss:

$$\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

sein.

Beweis II (analytischer Beweis). Nach der Voraussetzung ist:

$$a) \dots \overline{AD} = \overline{DP}$$

$$b) \dots \overline{PE} = \overline{EB}$$

aus der Figur 103 ergibt sich ferner, dass:

$$c) \dots \overline{AD} + \overline{DP} + \overline{PE} + \overline{EB} = \overline{AB}$$

ist; substituiert man den Wert von $\overline{AD}$ aus Gleichung a) und den Wert von $\overline{EB}$ aus Gleichung b) in Gleichung c), so geht diese über in:

$$d) \dots \overline{DP} + \overline{DP} + \overline{PE} + \overline{PE} = \overline{AB}$$

hieraus erhält man:

$$2 \cdot \overline{DP} + 2 \cdot \overline{PE} = \overline{AB}$$

oder nach der Erkl. 240:

$$e) \dots \overline{DP} + \overline{PE} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

Setzt man hierin, siehe Figur 103:

$$\overline{DP} + \overline{PE} = \overline{DE}$$

so erhält man schliesslich:

$$A) \dots \overline{DE} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 48. In Figur 104 ist:

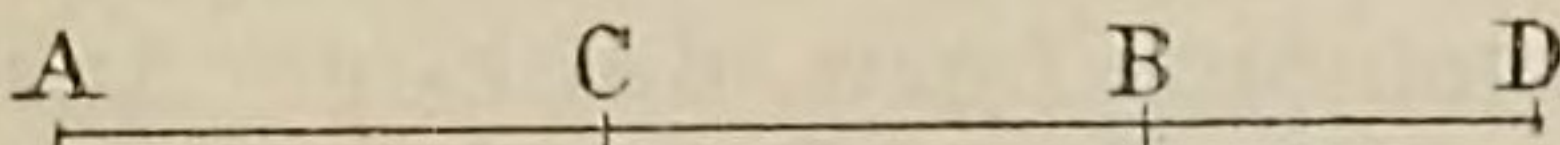
$$\overline{AC} = \overline{CB}$$

man soll beweisen, dass:

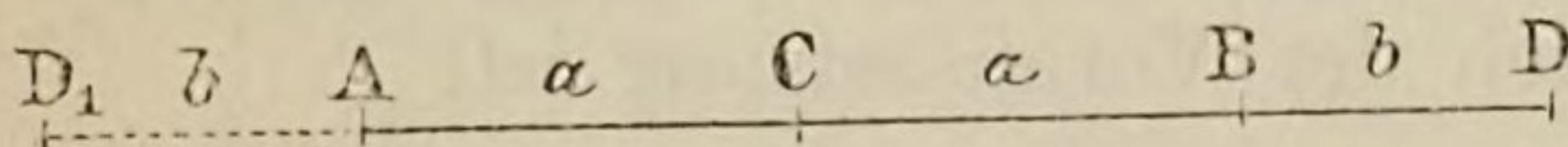
$$\overline{AD} + \overline{BD} = 2 \cdot \overline{CD}$$

ist.

Figur 104.



Figur 105.



Auflösung. Nach der Aufgabe ist die

Voraussetzung:

$$\overline{AC} = \overline{CB}$$

und die

Behauptung:

$$\overline{AD} + \overline{BD} = 2 \cdot \overline{CD}$$

Den Beweis kann man wie folgt führen:

Beweis I (geometrischer Beweis). Gemäss der Aufgabe ist in Figur 104 die Strecke AC gleich der Strecke CB bzw. $= a$, wie in Figur 105 angedeutet; denkt man sich, wie die Figur 105 zeigt, an die Verlängerung von AD nach AD_1 die Strecke BD oder b getragen, so erhält man die Strecke D_1D , welche, wie sich aus der Figur 105 ergibt, $= 2a + 2b$ oder $= 2 \cdot \overline{CD}$ ist, welche aber auch aus $\overline{AD} + \overline{AD_1}$, bzw., rücksichtlich der Konstruktion, aus $\overline{AD} + \overline{BD}$ besteht; hiernach muss also:

$$\overline{AD} + \overline{BD} = 2 \cdot \overline{CD}$$

sein.

Erkl. 241. Haben mehrere Summanden einen gemeinschaftlichen Faktor, so kann man diesen Faktor ausscheiden, indem man denselben vor eine Klammer (Parenthese) als Faktor setzt.

Hat man z. B.:

$$2a + 2b$$

so schreibt man hierfür:

$$2 \cdot (a + b)$$

Beide Schreibweisen bedeuten dasselbe, was man andeutet durch:

$$2a + 2b = 2(a + b)$$

Beweis II (analytischer Beweis).
Nach der Voraussetzung ist:

$$a) \dots \overline{AC} = \overline{CB}$$

ferner ist, wie sich aus der Figur 104 ergibt:

$$b) \dots \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BD}$$

und endlich ist (siehe Erkl. 240):

$$c) \dots \overline{BD} = \overline{BD}$$

addiert man die Gleichungen b) und c), so erhält man nach der Erkl. 239:

$$d) \dots \overline{AD} + \overline{BD} = \overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BD} + \overline{BD}$$

oder, wenn man den Wert von $\overline{AC}$ aus Gleichung a) in Gleichung d) substituiert:

$$e) \dots \overline{AD} + \overline{BD} = \overline{CB} + \overline{CB} + \overline{BD} + \overline{BD}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$f) \dots \overline{AD} + \overline{BD} = 2 \cdot \overline{CB} + 2 \cdot \overline{BD}$$

oder nach der Erkl. 241:

$$\overline{AD} + \overline{BD} = 2 \cdot (\overline{CB} + \overline{BD})$$

Setzt man hierin, siehe Figur 104:

$$g) \dots \overline{CB} + \overline{BD} = \overline{CD}$$

so erhält man:

$$A) \dots \overline{AD} + \overline{BD} = 2 \cdot \overline{CD}$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 49. Wenn in Figur 106:

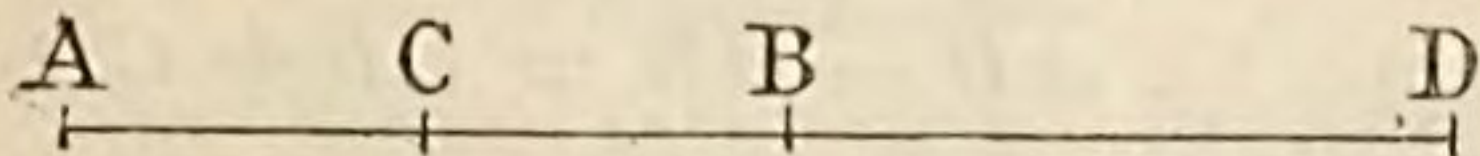
$$\overline{AD} + \overline{BD} = 2 \cdot \overline{CD}$$

ist, dann muss:

$$\overline{AC} = \overline{CB}$$

sein; dies soll bewiesen werden.

Figur 106.



Auflösung. Nach der Aufgabe ist die

Voraussetzung:

$$\overline{AD} + \overline{BD} = 2 \cdot \overline{CD}$$

und die

Behauptung:

$$\overline{AC} = \overline{CB}$$

Den Beweis kann man wie folgt führen:

Beweis. Nach der Voraussetzung ist:

$$a) \dots \overline{AD} + \overline{BD} = 2 \cdot \overline{CD}$$

ferner ist, wie sich aus der Figur 106 ergibt:

$$b) \dots \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BD}$$

und

$$c) \dots \overline{CD} = \overline{CB} + \overline{BD}$$

substituiert man den Wert von $\overline{AD}$ aus Gleichung b) und den Wert von $\overline{CD}$ aus

Gleichung c) in Gleichung a), so erhält man die Gleichung:

$$\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BD} + \overline{BD} = 2 \cdot (\overline{CB} + \overline{BD})$$

oder:

$$d) \dots \overline{AC} + \overline{CB} + 2 \cdot \overline{BD} = 2 \cdot \overline{CB} + 2 \cdot \overline{BD}$$

Nimmt man auf beiden Seiten dieser Gleichung $\overline{CB}$ und $2 \cdot \overline{BD}$ weg, so erhält man die Relation:

$$A) \dots \overline{AC} = \overline{CB}$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 50. Wenn in Figur 107:

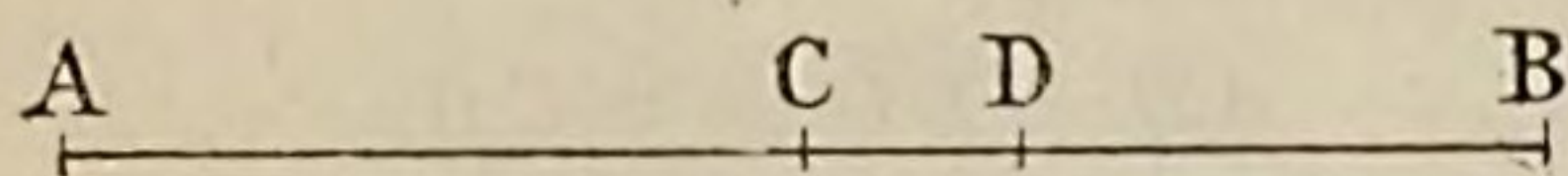
$$\overline{AC} = \overline{CB}$$

ist, so muss:

$$\overline{AD} - \overline{DB} = 2 \cdot \overline{CD}$$

sein; dies ist zu beweisen.

Figur 107.



Auflösung. Nach der Aufgabe ist die

Voraussetzung:

$$\overline{AC} = \overline{CB}$$

und die

Behauptung:

$$\overline{AD} - \overline{DB} = 2 \cdot \overline{CD}$$

Den Beweis kann man wie folgt führen:

Beweis. Nach der Voraussetzung ist:

$$a) \dots \overline{AC} = \overline{CB}$$

Wie sich aus der Figur 107 ergibt, ist:

$$b) \dots \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD}$$

ferner ist:

$$c) \dots \overline{DB} = \overline{DB}$$

Subtrahiert man Gleichung c) von b), so erhält man die Gleichung:

$$d) \dots \overline{AD} - \overline{DB} = \overline{AC} + \overline{CD} - \overline{DB}$$

oder, wenn man den Wert von $\overline{AC}$ aus Gleichung a) in Gleichung d) substituiert:

$$e) \dots \overline{AD} - \overline{DB} = \overline{CB} + \overline{CD} - \overline{DB}$$

Setzt man hierin:

$$f) \dots \overline{CB} = \overline{CD}$$

wie sich aus der Figur 107 ergibt, so erhält man:

$$g) \dots \overline{AD} - \overline{DB} = 2 \cdot \overline{CD}$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 51. Man beweise, dass, wenn in Figur 108:

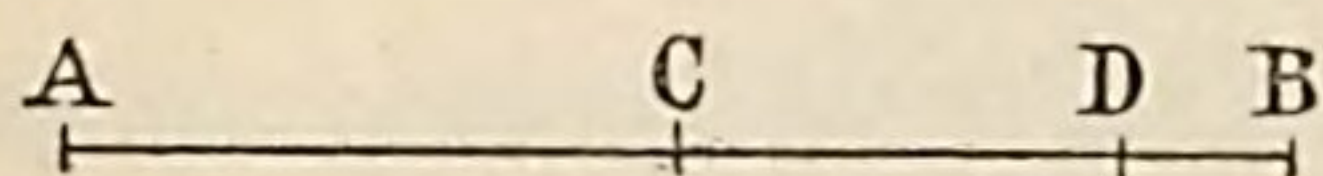
$$\overline{AD} - \overline{DB} = 2 \cdot \overline{CD}$$

ist,

$$\overline{AC} = \overline{CB}$$

sein muss.

Figur 108.



Erkl. 242. Wenn für eine Grösse ein zusammengesetzter Ausdruck (eine Summe oder eine Differenz) substituiert wird, so muss derselbe in eine Klammer (Parenthese) eingeschlossen werden, hierdurch wird angedeutet, dass der ganze zusammengesetzte Ausdruck jene Grösse zu vertreten hat.

Erkl. 243. Ein Satz aus der Arithmetik heisst:

„Eine Differenz wird subtrahiert, indem man den Minuenden subtrahiert, den Subtrahenden addiert“;

in Zeichen:

$$c - (a - b) = c - a + b$$

Aufgabe 52. In Figur 109 ist:

$$\overline{AC} = \overline{CB}$$

und

$$\overline{AE} = \overline{ED}$$

man soll beweisen, dass in derselben Figur:

$$2 \cdot \overline{EC} = \overline{DB}$$

sein muss.

Auflösung. Nach der Aufgabe ist die

Voraussetzung:

$$\overline{AD} - \overline{DB} = 2 \cdot \overline{CD}$$

und die

Behauptung:

$$\overline{AC} = \overline{CB}$$

Den Beweis kann man wie folgt führen:

Beweis. Nach der Voraussetzung ist:

$$a) \dots \overline{AD} - \overline{DB} = 2 \cdot \overline{CD}$$

ferner ist, wie sich aus der Figur 108 ergibt:

$$b) \dots \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD}$$

und

$$c) \dots \overline{DB} = \overline{CB} - \overline{CD}$$

substituiert man die Werte von $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$ aus den Gleichungen b) und c) in Gleichung a), so erhält man nach der Erkl. 242:

$$d) \dots \overline{AC} + \overline{CD} - (\overline{CB} - \overline{CD}) = 2 \cdot \overline{CD}$$

hieraus ergibt sich nach der Erkl. 243:

$$e) \dots \overline{AC} + \overline{CD} - \overline{CB} + \overline{CD} = 2 \cdot \overline{CD}$$

oder:

$$f) \dots \overline{AC} + 2 \cdot \overline{CD} - \overline{CB} = 2 \cdot \overline{CD}$$

Nimmt man von jeder Seite der Gleichung f) $2 \cdot \overline{CD}$ weg und addiert beiderseits $\overline{CB}$, so erhält man, siehe Figur 108:

$$A) \dots \overline{AC} = \overline{CB}$$

was zu beweisen war.

Auflösung. Nach der Aufgabe ist die

Voraussetzung:

$$\overline{AC} = \overline{CB}$$

und

$$\overline{AE} = \overline{ED}$$

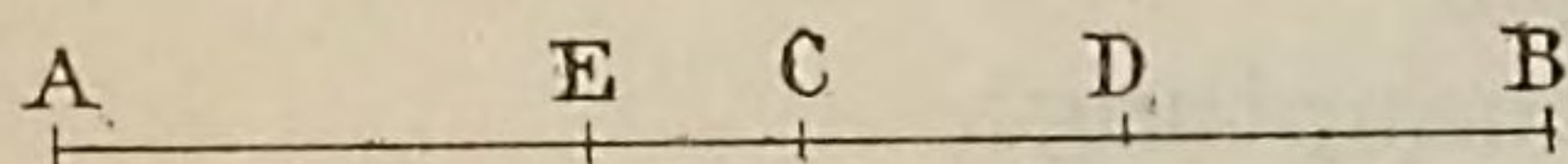
ferner ist die

Behauptung:

$$2 \cdot \overline{EC} = \overline{DB}$$

Den Beweis kann man wie folgt führen:

Figur 109.



Beweis. Aus der Figur 109 ergibt sich:

$$\text{a) } \dots \overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE}$$

und

$$\text{b) } \dots \overline{EC} = \overline{EB} - \overline{CB}$$

Addiert man diese Gleichungen, so erhält man:

$$\text{c) } \dots \overline{EC} + \overline{EC} = \overline{AC} + \overline{EB} - \overline{AE} - \overline{CB}$$

oder in Rücksicht darauf, dass nach der Voraussetzung:

$$\text{d) } \dots \overline{AC} = \overline{CB}$$

und

$$\text{e) } \dots \overline{AE} = \overline{ED}$$

ist:

$$\text{f) } \dots 2 \cdot \overline{EC} = \overline{EB} - \overline{ED}$$

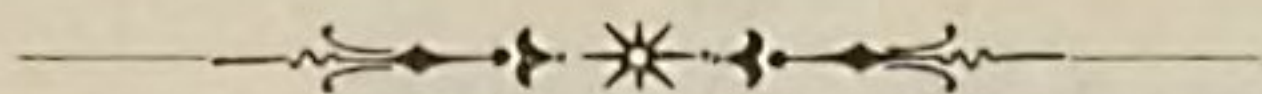
und hieraus erhält man, da, wie sich aus der Figur 109 ergibt:

$$\text{g) } \dots \overline{EB} - \overline{ED} = \overline{DB}$$

gesetzt werden kann:

$$\text{A) } \dots 2 \cdot \overline{EC} = \overline{DB}$$

was zu beweisen war.



/ Kleyer, Adolph / Sachs, Joseph

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie) für den
Schulunterricht und das Selbststudium

Bd.: 1

1889

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.150-m(1#1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11841067-6